Ex. 1

$$\int dx \; \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5}$$

- IL DENOMINATORE HA UN GRADO <u>INFERIORE</u> AL NUMERATORE.

  ↳ DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & -3x & +7 & x-5 \\ \hline -2x^2 & +10x & & 2x+7 \\ \hline 0 & +7x & +7 & \\ & -7x & +35 & \\ \hline & 0 & 42 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad (2x^2-3x+7) = (2x+7)(x-5) + 42$$

- $$\int dx \; \frac{(2x+7)(x-5)+42}{(x-5)} = \int dx \; \frac{(2x+7)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}} + \int dx \; \frac{42}{(x-5)} = \int dx \, (2x+7) + 42 \int dx \; \frac{1}{(x-5)}$$

$$= \int dx \, 2x + 7 \int dx + 42 \int dx \; \frac{1}{(x-5)} = x^2 + 7x + 42 \int dx \; \frac{1}{(x-5)}$$

- FACCIO SOSTITUZIONE NELL'ULTIMO INTEGRALE: $x - 5 = y \Rightarrow dx = dy \Rightarrow 42 \int dy \, \frac{1}{y} = 42 \ln|y|$

- ADESSO SO CHE $y = x - 5 \Rightarrow 42 \ln|y| = 42 \cdot \ln|x-5|$

$$\Rightarrow \left[x^2 + 7x + 42 \ln|x-5| + c \right]$$

Ex. 2 $\displaystyle\int dx \, \frac{3x-4}{x^2-6x+8}$ • IL DENOMINATORE HA UN GRADO <u>MAGGIORE</u> DEL NUMERATORE.

• USIAMO IL METODO DEI "<u>FRATTI SEMPLICI</u>": $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-6x+8}$ VOGLIAMO SCRIVERLO COME SOMMA DI DUE TERMINI, PERCHÉ È PIÙ SEMPLICE DA INTEGRARE.

I) TROVIAMO LE RADICI DEL DENOMINATORE:

$$x_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{36-4\cdot 1\cdot 8} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{36-32} = 3 \pm \frac{2}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$(ax^2+bx+c) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Rightarrow x^2-6x+8 = (x-1)(x-2)$$

II) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x-2)} = \dfrac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

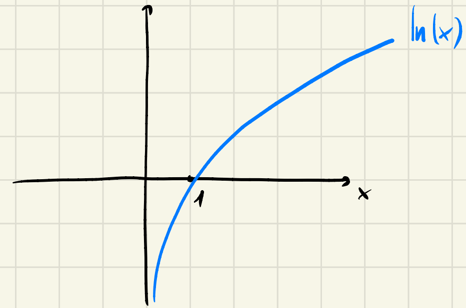
$= \dfrac{(A+B)x + (-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$

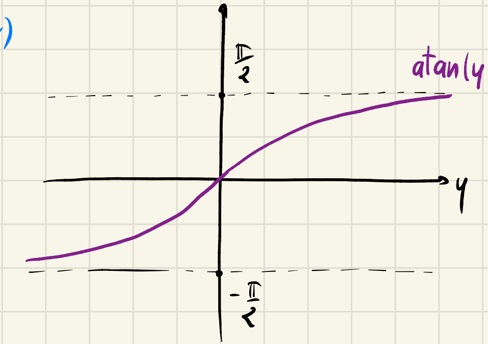
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 3 & , \quad B = 3-A & , \quad B = 2 \\ -2A-B = -4 & , \quad 2A+B = 4 \quad , \quad 2A + (3-A) = 4 \quad , & A = 1 \end{cases}$$

III) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{2}{(x-2)}$

IV) $\int dx\, f(x) = \int dx\, \dfrac{1}{(x-1)} + 2 \int dx\, \dfrac{1}{(x-2)} = \left[\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + c \right]$

Ex. 3 $f(x) = \text{atan}(\ln(x))$





i) PER TROVARE DI CHI È LA PRIMITIVA:

SE $f'(x) = g(x)$ ALLORA $f(x)$ È LA PRIMITIVA DI $g(x)$.

- BISOGNA FARE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA.

↳ $f(h(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f(h(x))\right) = \frac{df}{dh(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx} \Rightarrow f(h(x)) = \text{atan}(\ln(x))$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\text{atan}(y)\right) = \frac{1}{1+y^2}$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ È PRIMITIVA DI $\frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}$

ii) f HA DERIVATA SECONDA CONTINUA IN $x_0 = 1$?

↳ CALCOLIAMO LA $f''(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\left(1+\ln^2(x)\right)}\right) = \left(\frac{0-\left[\left(1+\ln^2(x)\right)+\cancel{x}\left(0+2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)\right]}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}\right) = -\frac{\left(1+\ln^2(x)\right)+2\ln(x)}{x^2\left(1+\ln^2(x)\right)^2}$$

È CONTINUA SE ESISTONO SIA IL LIMITE DESTRO CHE IL LIM. SINISTRO E QUESTI COINCIDONO.

$$\lim_{x\to 1^-} f''(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{\left(1+\overset{0^+}{\ln^2(x)}\right)+2\overset{0^-}{\ln(x)}}{\underset{1}{x^2}\left(1+\underset{0^+}{\ln^2(x)}\right)^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f''(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{\left(1+\overset{0^+}{\ln^2(x)}\right)+2\overset{0^+}{\ln(x)}}{\underset{1}{x^2}\left(1+\underset{0^+}{\ln^2(x)}\right)^2} = -1$$

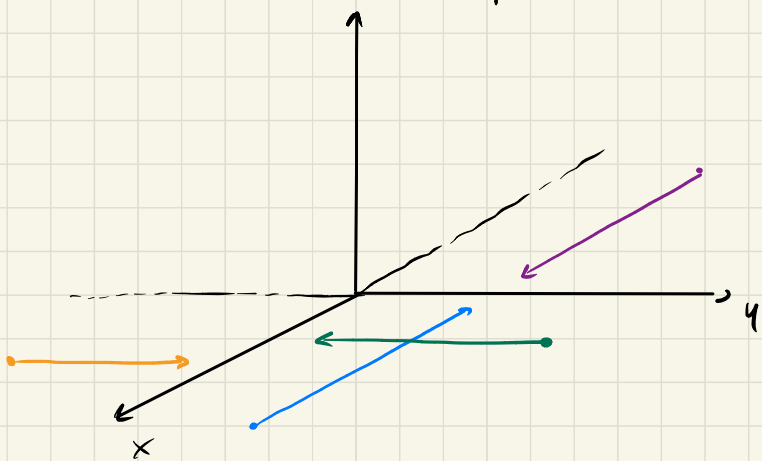
iii) TAYLOR AL II° ORDINE IN $x_0 = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0}(x-x_0)^2$$

$$f(x_0=1) = 0 \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0=1} = 1 \qquad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x_0=1} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{atan}(\ln(x)) \simeq 0 + 1(x-1) + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 \simeq \left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\right]$$

Ex. 4: DOMINIO DI $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y = \dfrac{x^2 + 8y - y^2x}{y \cdot x}$



SE $y \to 0$ O $x \to 0$ ALLORA ABBIAMO DEI PROBLEMI.

IL NUMERATORE NON DA PROBLEMI È DEFINITO OVUNQUE.

FISSIAMO $y \neq 0$ $\left[\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 8y - y^2x}{y \cdot x} = +\infty\right]$

$\left[\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + 8y - y^2x}{y \cdot x} = -\infty\right]$

$x \neq 0$ $\left[\lim_{y \to 0^+} \dfrac{x^2 + 8y - y^2x}{y \cdot x} = \infty\right]$

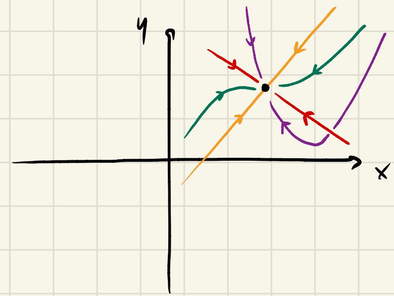
$\left[\lim_{y \to 0^-} \dfrac{x^2 + 8y - y^2x}{y \cdot x} = -\infty\right]$

QUINDI GLI ASSI CARTESIANI SONO UN PROBLEMA $\rightarrow$ DEVO ESCLUDERLI DAL DOMINIO.

SE MANDO SIA x CHE y A ZERO SIMULTANEAMENTE ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y \right)$$

SU UN PIANO CI SONO INFINITI MODI DI RAGGIUNGERE UN PTO :



SE IL LIMITE DI UNA FUNZIONE $\exists$ NON PUÒ DIPENDERE DAL PERCORSO, QUINDI DEVE ESSERE UGUALE PER <u>TUTTI</u> I PERCORSI.

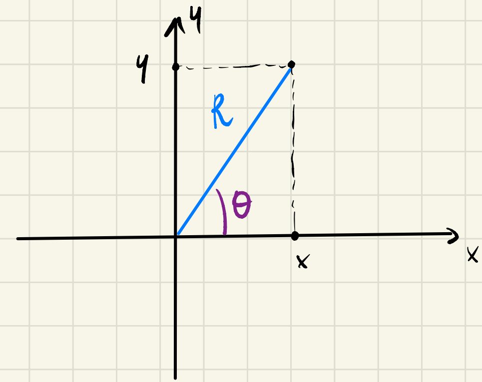
↳ NON POSSO PROVARE INFINITI PERCORSI, ALLORA POSSO SOLO PROVARE CHE <u>NON</u> ESISTE!

<u>METODO 1)</u> : $(y - y_0) = m(x - x_0)$ CON (x_0, y_0) COORDINATE DEL PTO IN CUI VOGLIO FARE IL LIMITE!

$(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow y = mx$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{m\cdot x}+\frac{8}{x}-m\cdot x\right)= \begin{cases} \nearrow +\infty & x\to 0^+ \\ \searrow -\infty & x\to 0^- \end{cases}$$

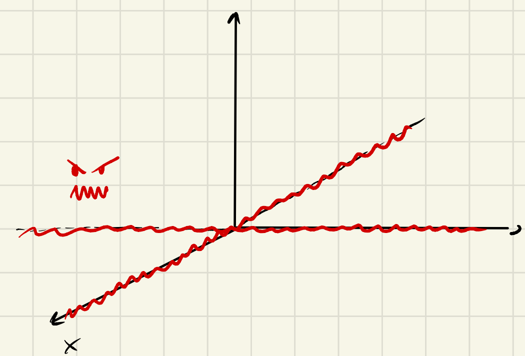
<u>METODO 2)</u> : COORDINATE POLARI $\quad x = R\cos\theta$, $\quad y = R\,\text{sen}\,\theta$



$$\Rightarrow \lim_{R\to 0}\left(\underbrace{\frac{\cancel{R}\cos\theta}{\cancel{R}\,\text{sen}\,\theta}}_{\text{cost.}}+\underbrace{\frac{8}{R\cos\theta}}_{\text{ESPLODE!}}-\overset{0^{\pm}}{R\,\text{sen}\,\theta}\right)= \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{se } \theta\in[0,\pi] \\ \searrow -\infty & \text{se } \theta\in[\pi,2\pi] \end{cases}$$

→ LA FUNZIONE NON È CONTINUA NEANCHE IN $(0,0)$!

$$\Rightarrow \left[D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge y\neq 0\}\right]$$



Ex. 5: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{y^2x^2}$

HO 2 STRADE: i) MI RICONDUCO AL LIMITE NOTEVOLE:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1 \quad ⊛⊛$$

MI RICORDO CHE: $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

$$\Rightarrow 1-\cos(\alpha) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1-\cos(xy) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{xy}{2}\right)$$

⊛

ii) PASSO IN POLARI E SVILUPPO $\cos(xy)$ IN UN INTORNO DI $(0,0)$ CON TAYLOR.

ii) $x = R\cos\theta \quad y = R\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} \rightsquigarrow \lim_{R\to 0} \frac{1-\cos(R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta)}{(R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta)^2}$$

È IL LIMITE AD UNA SOLA VARIABILE.

TAYLOR DEL $\cos(x)$ IN UN INTORNO DI 0 ?

$$\cos(x) \simeq \cos(0) + (-\operatorname{sen}(x))\Big|_0 \cdot (x-0) + \frac{1}{2}(-\cos(x))\Big|_0 (x-0)^2 + \dots$$

$$= 1 + 0 \cdot \cancel{(x-0)} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (x-0)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

NEL NOSTRO CASO: $\cos(R^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \simeq 1 - \frac{1}{2}(R^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 = 1 - \frac{1}{2}R^4 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta$

$$\lim_{R\to 0} \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \frac{1}{2}R^4\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta)}{R^4 \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{R\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{R^4}\cancel{\cos^2\theta}\cancel{\operatorname{sen}^2\theta}}{\cancel{R^4}\cancel{\cos^2\theta}\cancel{\operatorname{sen}^2\theta}} = \left[\frac{1}{2}\right]$$

ii) USO ⊛ $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{xy}{2}\right)}{\left(\frac{xy}{2}\right)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{xy}{2}\right)}{\left(\frac{xy}{2}\right)}\right)^2$

POSSO FARE LA SOSTITUZIONE IN <u>COORDINATE POLARI</u>: $x = R\cos\theta$

$y = R\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{R^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{2}\right)}{\frac{R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}}\right)^2}_{\text{TENDE A } 1} = \frac{1}{2}$$

✓