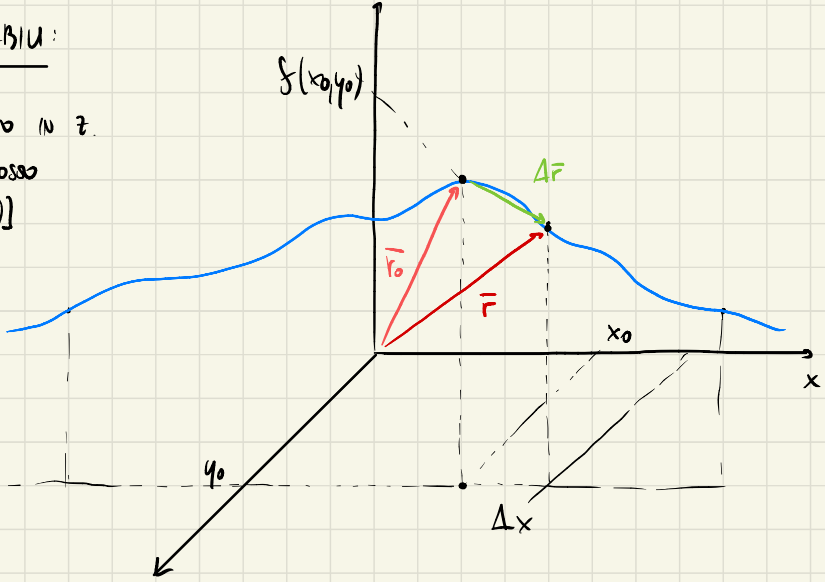
INTUIZIONE DIETRO ALLE DERIVATE DI FUNZIONI A 2 VARIABILI:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to f(x,y)$$

MANDA UN PTO SUL PIANO (x,y) IN UN PTO IN z.
$\Rightarrow$ AD OGNI PTO NEL GRAFICO DI f POSSO ATTRIBUIRE 3 COORDINATE $[x,y,f(x,y)]$



QUINDI AD OGNI PTO NEL GRAFICO POSSO ATTRIBUIRE UN VETTORE $\bar{r}$.

$$\boxed{\bar{r}_0} = [\overset{x}{x_0}, \overset{y}{y_0}, \overset{z}{f(x_0,y_0)}]$$

INCREMENTO SOLO LUNGO x:
$$\bar{r} = [x_0+\Delta x, y_0, f(x_0+\Delta x, y_0)]$$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0 = [\Delta x, 0, f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)]$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[1, 0, \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right] = \left[1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\right]$$

NOTA: PIÙ $\Delta x \to 0$ PIÙ IL VETTORE $\Delta\bar{r}$ DIVENTA TANGENTE ALLA CURVA NEL PTO $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$

TUTTO QUESTO POSSO FARLO SE $\exists \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right)$

POSSO FARE LA STESSA COSA LUNGO y $\Rightarrow$ $\frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left[0, 1, \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}\right] = \left[0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\right]$

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial y}$ SONO 2 VETTORI TANGENTI AL GRAFICO.

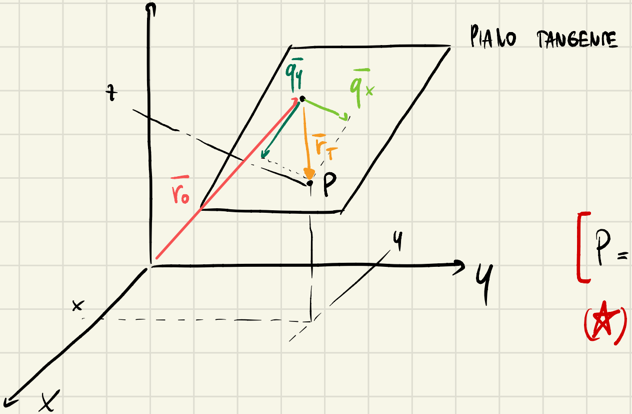
↳ PER 2 VETTORI PASSA UN PIANO.

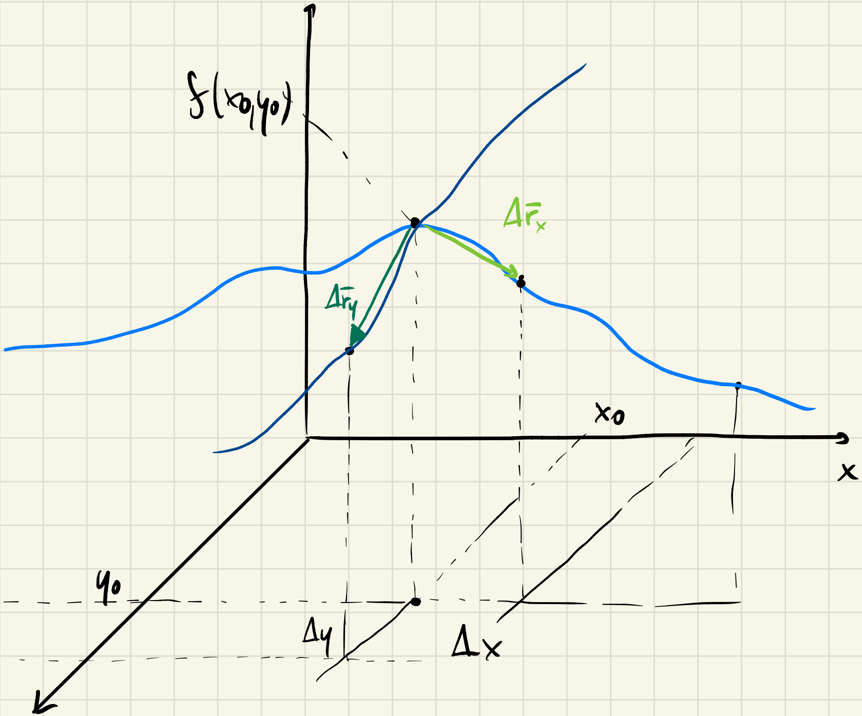
CHIAMIAMOLI: $\bar{q}_x, \bar{q}_y$ SONO 2 GENERATORI DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO.

UN QUALSIASI PTO APPARTENENTE AL PIANO PUÒ ESSERE SCRITTO COME:

$$r_T = a \cdot \bar{q}_1 + b \bar{q}_2 \quad \text{CON} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

A PARTIRE DAL PTO $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$





$$\left[P = [x, y, z] = \bar{r}_0 + \bar{r}_T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)] + a \cdot \bar{q}_x + b \bar{q}_y \right]$$

(★)

Ex. $f(x,y) = x^2 + y$ PIANO TANGENTE IN $(x_0,y_0) = (1,1)$

$$\bar{q_x} = \left[1,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}\right] = \left[1,\ 0,\ 2x\Big|_{(1,1)}\right] = [1,0,2]$$

$$\bar{q_y} = \left[0,\ 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}\right] = \left[0,\ 1,\ 1\Big|_{(1,1)}\right] = [0,1,1]$$

(★) $[x,y,z] = [1,1,2] + a[1,0,2] + b[0,1,1] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + a + 0 & \rightsquigarrow\ a = x - 1 \\ y = 1 + 0 + b & \rightsquigarrow\ b = y - 1 \\ z = 2 + 2a + b \end{cases}$$

⊛ $\Rightarrow \left[z = 2 + 2 \cdot (x-1) + (y-1) \right]$ EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE IN $(1,1,2)$

NOTA: TUTTO QUESTO È POSSIBILE GRAZIE AL FATTO CHE $\exists$ CONTINUE LE DERIVATE PARZIALI IN (x_0,y_0).

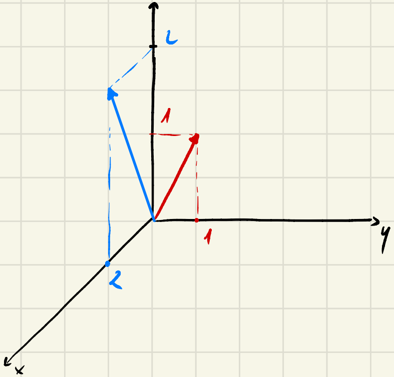
$$\bar{q}_x = \left[1, 0, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}\right]$$

$$\bar{q}_y = \left[0, 1, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\right]$$

CHE COSA CI DICONO? QUAL È LA DIREZIONE PIÙ PENDENTE!

ES. $\bar{q}_x = [1, 0, 2]$

$\bar{q}_y = [0, 1, 1]$



$\hat{x}$ È LA DIREZIONE PIÙ PENDENTE IN QUESTO CASO.

↳ ⊛ SE x AUMENTA => $z \propto 2(x-1)$

È PIÙ PENDENTE LA RETTA

SE y AUMENTA => $z \propto (y-1)$

REMINDER:

1) 1 VARIABILE $\left(\frac{df}{dx}\right)$ = PENDENZA RETTA TANGENTE AL GRAFICO ➡ 2 VARIABILI $\bar{\nabla} f$ = "PENDENZA" DEL PIANO TANGENTE AL GRAFICO.

DERIVATE PARZIALI

SIA $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ A È UN APERTO (INSIEME CHE CONTIENE UN INTORNO DI OGNI SUO PUNTO)

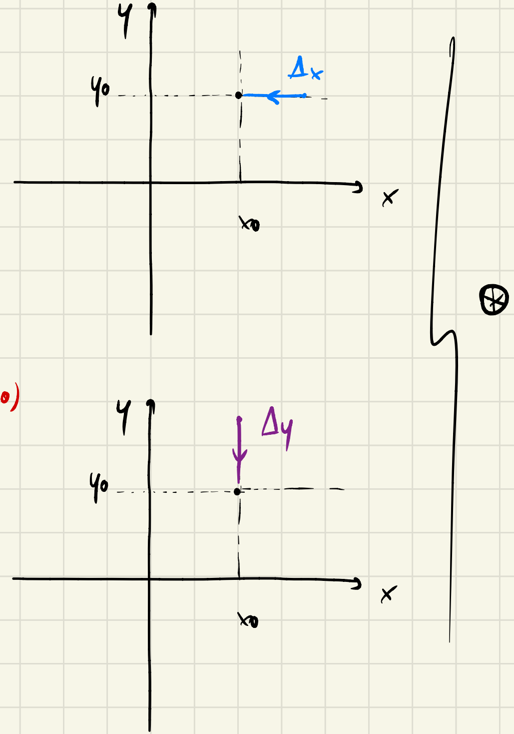
↳ EX. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$

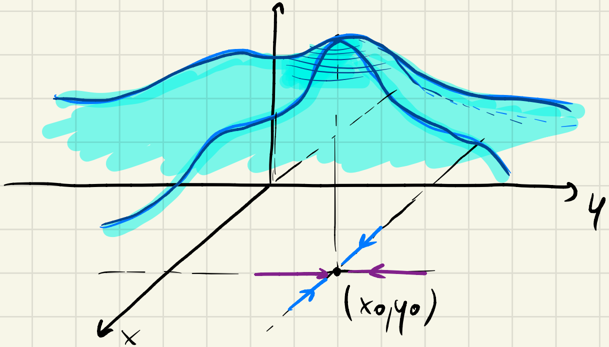
f AMMETTE DERIVATA PARZIALE NELLA VARIABILE x NEL PTO (x_0,y_0) SE ∃ FINITO :

$$\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \right] \text{ SE } \exists \text{ È LA } \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

VALE LA STESSA COSA PER y.



POSSO VEDERLA COME UNA PARAMETRIZZAZIONE:



DEF. $g = f(\cdot, y_0)$ HO BLOCCATO LA y.

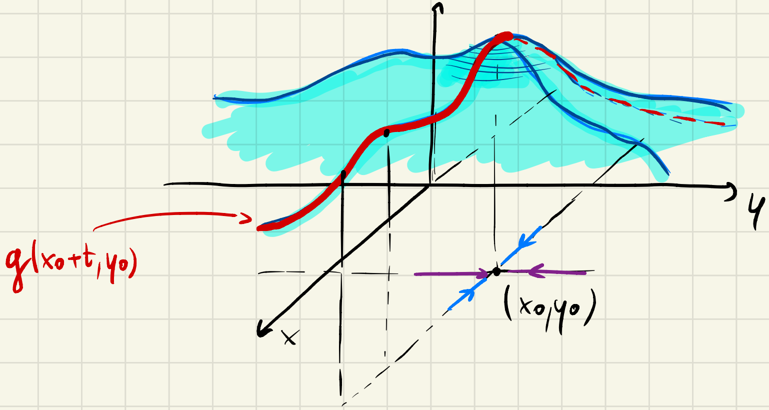
$h = f(x_0, \cdot)$ HO BLOCCATO LA x.

$\Downarrow$

SOLO 2 FUNZIONI AD UNA SOLA VARIABILE ORA!

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = g'(x_0) \quad \text{INFATTI:} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x, y_0)}^{g(x_0+t)} - \overbrace{f(x_0,y_0)}^{g(x_0)}}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{g(x_0+t) - g(x_0)}{t}$$

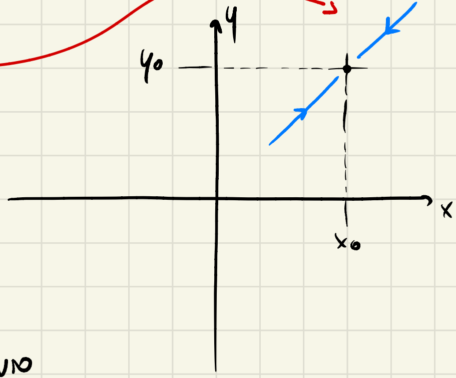
(HO RINOMINATO Δx IN t)



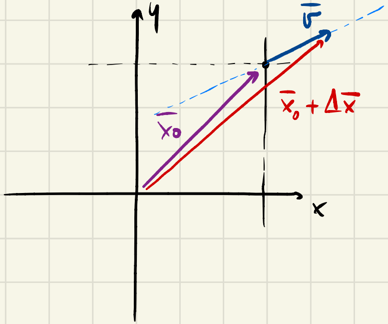
- **DERIVATA DIREZIONALE:**

↳ LE DERIVATE PARZIALI POSSO FARLE LUNGO GLI ASSI CARTESIANI O QUALSIASI RETTA PARALLELA AD ESSI (VEDI ⊛).

MA SE VOLESSI DERIVARE LUNGO UNA DIREZIONE DIVERSA?



MI SERVE UN VETTORE SUL PIANO CHE IDENTIFICHI LA DIREZIONE LUNGO LA QUALE VOGLIO DERIVARE... DEFINIAMOLO!



VOGLIO USARE LUI PER GENERARE L'INCREMENTO CHE MI SERVE PER LA DERIVATA.

⇒ LO VOGLIO DI MODULO 1.

COSTRUISCO IL RAPPORTO INCREMENTALE:

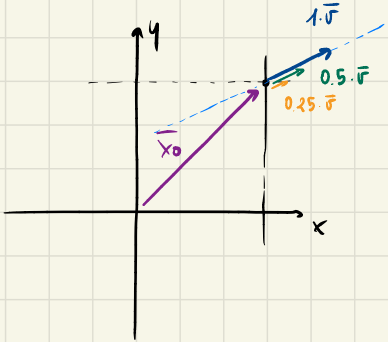
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \lim_{|\Delta\bar{x}| \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + \Delta\bar{x}) - f(\bar{x}_0)}{|\Delta\bar{x}|}$$

NON È PROPRIO FORMALE MA È INTUITIVO!

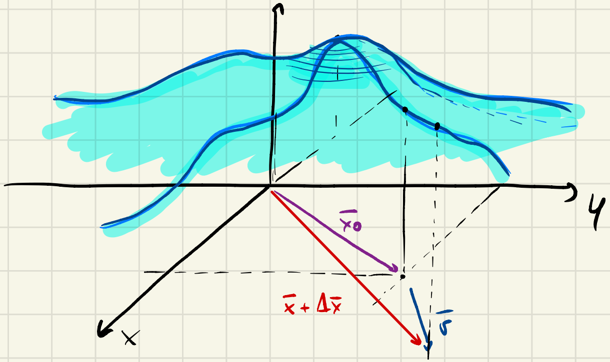
PER FORMALIZZARLO DICIAMO CHE ∃ LA DERIVATA DIREZIONALE SE ∃ FINITO:

$$\left[\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x_0}+t\bar{v}) - f(\bar{x_0})}{t}\right] \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \qquad \text{CON } t\in[0,1]$$

NOTA: $f(\bar{x_0}) = f(x_0,y_0)$



MANDO $t \to 0$
TENENDO $\bar{v}$ FISSATO!



COME COLLEGO LE DERIVATE PARZIALI ALLE DERIVATE DIREZIONALI? SE PROIETTO $\bar{v}$ SU x → $\frac{\partial f}{\partial x}$

SE PROIETTO $\bar{v}$ SU y → $\frac{\partial f}{\partial y}$

○ DIFFERENZIABILITÀ:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ È DIFFERENZIABILE IN UN PTO $\bar{x}_0$ SE $\exists$ UNA APPLICAZIONE LINEARE (UNA FUNZIONE CHE È LINEARE NELLE VARIABILI), CHE CHIAMEREMO $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, TALE CHE:

$$\left[\lim_{\Delta\bar{x}\to 0} \frac{f(\bar{x}_0+\Delta\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - L[\Delta\bar{x}]}{|\Delta\bar{x}|} = 0\right]^{(\star\star)}$$

L È IL DIFFERENZIALE DELLA f, SI INDICA ANCHE CON D_f.

⇝ È UGUALE A: $\displaystyle\lim_{\Delta\bar{x}\to 0} \frac{f(\bar{x}_0+\Delta\bar{x}) - f(\bar{x}_0)}{|\Delta\bar{x}|} = \lim_{\Delta\bar{x}\to 0} \frac{L[\Delta\bar{x}]}{|\Delta\bar{x}|}$

CHIAMIAMO $\bar{x}_0 + \Delta\bar{x} = \bar{x} \Rightarrow \Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$

SE $\displaystyle\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - \overbrace{(f(\bar{x}_0) + L[\bar{x}-\bar{x}_0])}^{(\star)}}{|\bar{x}-\bar{x}_0|} = 0$ f È DIFFERENZIABILE!

GUARDIAMOLA INTUITIVAMENTE... MI STA DICENDO CHE SE $\exists$ UNA $L[\bar{x}-\bar{x}_0]$ TALE CHE $\overbrace{f(\bar{x}_0) + L[\bar{x}-\bar{x}_0]}^{(\star)}$ APPROSSIMA $f(\bar{x})$ IN $\bar{x}_0$ ALLORA f È DIFFERENZIABILE.

$\left[f(\bar{x}_0) + L[\bar{x}-\bar{x}_0] = P(\bar{x})\right]$ È UN POLINOMIO DI I° GRADO IN PIÙ VARIABILI CHE APPROSSIMA f IN $\bar{x}_0$!

- **TH. DIFFERENZIALE TOTALE**.

SE $\exists$ LOCALMENTE CONTINUE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI DI $f(\bar{x})$ IN UN PTO $\bar{x_0}$

$\Rightarrow$ f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x_0}$.

PER FUNZIONI $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ IL CANDIDATO AD ESSERE IL DIFFERENZIALE È:

$$L[\bar{x}-\bar{x_0}] = \bar{\nabla} f\Big|_{\bar{x_0}} \cdot [\bar{x}-\bar{x_0}]$$

$$\left[\bar{\nabla} f\Big|_{\bar{x_0}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x_0}}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x_0}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\Big|_{\bar{x_0}}\right]\right]$$

GRADIENTE DELLA FUNZIONE

$$\left[[\bar{x}-\bar{x_0}] = [x_1 - x_0^1, x_2 - x_0^2, \dots, x_N - x_0^N]\right]$$

VETTORE DEGLI INCREMENTI

Ex. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x,y,z) \to f(x,y,z)$

$$\bar{\nabla} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\right]$$

$$[\bar{x}-\bar{x_0}] = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$$

$\bar{\nabla} f\Big|_{\bar{x_0}} \cdot [\bar{x}-\bar{x_0}]$ È UN PRODOTTO SCALARE $[x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = x_1 \cdot x_1' + x_2 \cdot x_2' + x_3 \cdot x_3'$

COME COLLEGO IL DIFFERENZIALE ALLA DERIVATA DIREZIONALE? PRENDIAMO UNA f DIFFERENZIABILE!

$$\frac{\partial f}{\partial \bar v} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar x_0 + t\bar v) - f(\bar x_0)}{t} \qquad \Delta \bar x = t\bar v$$

ALLORA VOLERE CHE $\Delta \bar x \to 0$ SIGNIFICA CHIEDERE CHE $t \to 0$, VISTO CHE $\bar v$ HA MODULO $= 1$ FISSATO.

PRENDIAMO LA DEFINIZIONE DI DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{\Delta \bar x \to 0} \frac{f(\bar x_0 + \Delta \bar x) - f(\bar x_0) - L[\Delta \bar x]}{|\Delta \bar x|} = 0$$

È EQUIVALENTE A:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar x_0 + t\bar v) - f(\bar x_0) - L[t\bar v]}{\underbrace{|t\bar v|}_{\to\, = t}} = 0$$

SE L È UN'APPLICAZIONE LINEARE $\Rightarrow L[t\bar v] = tL[\bar v]$

Ex. $L[x] = 7 \cdot x$

$L[5x] = 7 \cdot (5x) = 5 \cdot (7x) = 5L[x]$ ✓

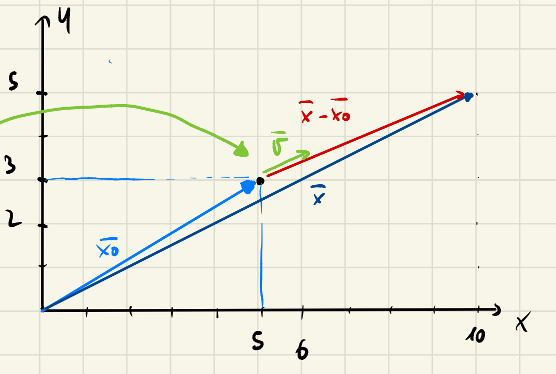
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar x_0 + t\bar v) - f(\bar x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t} L[\bar v]}{\cancel{t}} = L[\bar v]$$

ALLORA LA DERIVATA DIREZIONALE È ESATTAMENTE IL DIFFERENZIALE VALUTATO IN $\bar v$.

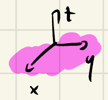
Ex. $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) = (5,3)$

$\bar{x} = (x, y) = (10, 5)$

$\bar{x} - \bar{x}_0 = (10-5, 5-3) = (5,2)$



QUESTO È SOLO IL DOMINIO!



$(\bar{x} - \bar{x}_0)$ INDIVIDUA UNA DIREZIONE SUL PIANO!

NORMALIZZIAMOLO: $|\bar{x} - \bar{x}_0| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}(5,2)}$

SE $f(x,y) = e^{x} \cdot y$ $\quad \left.\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\right|_{\bar{x}_0} = L[\bar{v}]$ MA $L[\bar{v}] = \left.\bar{\nabla} f\right|_{\bar{x}_0} \cdot \bar{v}$

$$\left.\bar{\nabla} f\right|_{\bar{x}_0} = \left.\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\right|_{\bar{x}_0}$$

$$= \left.\left[e^{x} \cdot y, e^{x}\right]\right|_{\bar{x}_0}$$ SE $\bar{x}_0 = (5,3) \Rightarrow \left.\bar{\nabla} f\right|_{(5,3)} = \left[3e^{5}, e^{5}\right]$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\right|_{(5,3)} = \left[3e^{5}, e^{5}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(15e^{5} + 2e^{5}\right)$$