MATRICI

SONO DELLE TABELLE MOLTO COMODE PER FARE CALCOLI IN PIÙ VARIABILI.

EX. IMMAGINIAMO DI VOLER RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} 5x+3y=0 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ POSSO RAPPRESENTARE QUESTO SISTEMA COME IL PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN VETTORE!

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

AGLI ELEMENTI DI UNA MATRICE POSSO ATTRIBUIRE DEGLI INDICI, ESATTAMENTE COME FACCIO NEI VETTORI. VEDIAMOLO...

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ È UN <u>VETTORE COLONNA</u>. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ È UN <u>VETTORE RIGA</u>.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{INDICE RIGA} = 1 \\ \to \text{INDICE RIGA} = 2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

INDICE COLONNA = 1 INDICE COLONNA = 2

IN UNA MATRICE HO SIA RIGHE CHE COLONNE $\Rightarrow$ PER OGNI ELEMENTO HO BISOGNO DI DUE INDICI: RIGA E COLONNA.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \circledast \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \Rightarrow$$

ELEMENTO	RIGA	COLONNA	POSIZIONE
5	1	1	11
3	1	2	12
2	2	1	21
1	2	2	22

→ I° RIGA, II° COLONNA. ⊛

DIRÒ QUINDI CHE : $A_{11} = 5$ $A_{12} = 3$

$A_{21} = 2$ $A_{22} = 1$

POSSO FARLO IN 3, 4, 5, ... N DIMENSIONI : EX. IN 3D

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

COSA RAPPRESENTANO LE MATRICI ? LE APPLICAZIONI LINEARI : SONO DELLE "FUNZIONI" CHE MODIFICANO I VETTORI.

EX. $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

APPLICO A AL VETTORE $\bar{u}$, CHE VIVE IN $\mathbb{R}^2$ (SUL PIANO).

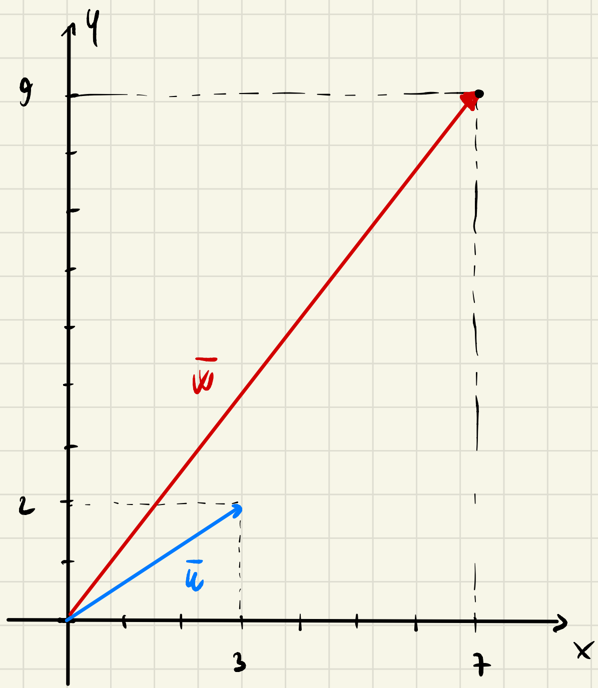
COME SI FA ? COSÌ...

$$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$A\bar{u} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\cdot 3 + 2\cdot 2\\ 3\cdot 3 + 2\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\ 9\end{bmatrix}$$

¡ È UN ALTRO VETTORE !

CHIAMIAMOLO $\bar{w}$ $\Rightarrow$ $\bar{w} = A\bar{u}$



HO TRASFORMATO $\bar{u}$ IN $\bar{w}$, GRAZIE AD A!

NOTA: OCCHIO A DOVE METTI IL VETTORE IN ENTRATA!

$$A\bar{u} = \bar{w} \qquad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = ??? \quad \times$$

MA

OCCHIO! LI HO SCAMBIATI!

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \checkmark$$

IN GENERALE È MEGLIO USARE VETTORI COLONNA.

- PRODOTTO TRA MATRICI:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\ell} \\ B_{21} & B_{22} & & B_{2\ell} \\ \vdots & & & \\ B_{n1} & & & B_{n\ell} \end{bmatrix}$$

$(m \times n)$ $\quad$ $(n \times \ell)$

N° DI RIGHE $\quad$ N° DI COLONNE

POSSO FARE IL PRODOTTO SOLO SE IL N° DI COLONNE DI UNA È UGUALE AL N° DI RIGHE DELL'ALTRA.

PRODOTTO RIGA PER COLONNA:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(2 \times 2) \qquad (2 \times 3)$

SONO UGUALI $\Rightarrow$ POSSO FARE IL PRODOTTO!

$$A \cdot B = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

NOTE IMPORTANTI:

1) $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

2) FARE $A \cdot B$ È COME COMPORRE DUE APPLICAZIONI LINEARI:

$$(A \cdot B)\bar{u} = A(\underbrace{B\bar{u}}) = \underbrace{A\bar{w}} = \bar{v}$$

FACCIO AGIRE B, CHE MI DÀ UN VETTORE ($\bar{w}$).

POI, FACCIO AGIRE A, CHE MI DÀ UN ALTRO VETTORE ($\bar{v}$).

$\bar{u} \xrightarrow{B} \bar{w} \xrightarrow{A} \bar{v}$ È UGUALE A $\bar{u} \xrightarrow{C} \bar{v}$

CAPIAMO... $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ CI DICE COME VA LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x DELLA DERIVATA PARZIALE PRIMA DI f RISPETTO A x.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ CI DICE COME VA LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x DELLA DERIVATA PARZIALE PRIMA DI f RISPETTO A y.

EX. $f(x,y) = e^{xy} + y$

$$\overline{\nabla} f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = \left[y e^{xy},\ x e^{xy} + 1 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x^2 e^{xy}$$

CHIAMO "x" INDICE DELLA COORDINATA (O VARIABILE) N° 1

CHIAMO "y" INDICE DELLA COORDINATA (O VARIABILE) N° 2

POSIZIONE: 1 2

$$\Rightarrow \quad \overline{\nabla} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

PER LE COMPONENTI DEL GRADIENTE HO BISOGNO DI UN SOLO INDICE PER ELEMENTO...

↳ SE $x \to 1$, $y \to 1$ $\to$ $\frac{\partial}{\partial x} \to 1$ $\quad \frac{\partial}{\partial y} \to 2$

PER $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ HO BISOGNO DI DUE INDICI : $\frac{\partial^2 f}{\underset{1}{\partial x}\,\underset{1}{\partial x}}$ MMMH...

MA ANCHE PER $\frac{\partial^2 f}{\underset{1}{\partial x}\,\underset{2}{\partial y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\underset{2}{\partial y}\,\underset{1}{\partial x}}$, $\frac{\partial^2 f}{\underset{2}{\partial y}\,\underset{2}{\partial y}}$

$\Rightarrow$ MATRICE !

$$\left[\; H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \overset{11}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} & \overset{12}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \\ \overset{21}{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}} & \overset{22}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \end{bmatrix} \;\right]$$

MATRICE HESSIANA

(O MATRICE DELLE DERIVATE SECONDE)

COME LA DERIVATA SECONDA IN UNA VARIABILE, CHE CI AIUTAVA A CAPIRE SE I PUNTI ERANO MINIMI O MASSIMI, ANCHE LA MATRICE HESSIANA CI AIUTA IN PIÙ VARIABILI.

PER FARLO DOBBIAMO AVERLA IN FORMA DIAGONALE : $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ SE NON LO È GIÀ!

COME SI FA? IMMAGINIAMO DI FARLO PER $f(x,y) = e^{xy} + y$ NEL PTO $(x_0,y_0) = (0,1)$

1) PTI. CRITICI? $\bar{\nabla} f(x,y) = \left[ye^{xy},\ xe^{xy} + 1 \right]$

PER QUALI x,y È NULLO? $\begin{cases} ye^{xy} = 0 & \rightarrow y = 0 \\ xe^{xy} + 1 = 0, & x + 1 = 0,\ x = -1 \end{cases}$

$(x_0,y_0) = (-1,0)$ È UN PTO CRITICO! MAX O MINIMO?

2) $H_f(-1,0) = \left. \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy}(x \cdot y + 1) \\ e^{xy}(x \cdot y + 1) & x^2 e^{xy} \end{bmatrix} \right|_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

NON È DIAGONALE... DOBBIAMO CALCOLARNE IL <u>POLINOMIO CARATTERISTICO</u> $P(\lambda)$

STEP I°: $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ SOTTRAGGO λ SULLA DIAGONALE.

$\left(\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \right)$

STEP II°: CALCOLO IL DETERMINANTE: $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - (1)^2 = P(\lambda)$

STEP III°: TROVO LE RADICI DI $P(\lambda) \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$$-\lambda(1-\lambda) - 1 = 0, \quad -\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(-1)} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

STEP IV°: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.61 & 0 \\ 0 & -0.61 \end{bmatrix}$

- SE $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ HO UN **MINIMO**
- SE $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ HO UN **MASSIMO**
- SE UNO È POSITIVO E L'ALTRO NEGATIVO $\Rightarrow$ HO UNA **SELLA**.

NEL NOSTRO CASO $\Rightarrow$ SELLA!

COME PER IL GRADIENTE LE ENTRATE NELLA MATRICE HESSIANA CI DICONO COSE IMPORTANTI!

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

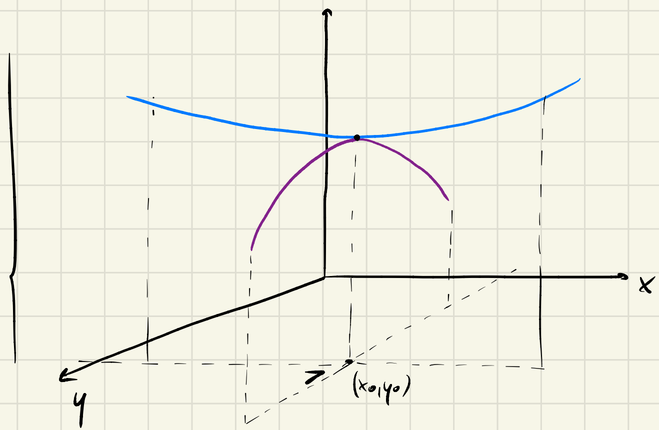
SE $\lambda_1 > 0 \Rightarrow$ FUNZIONE CONVESSA LUNGO x

$\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ FUNZIONE CONCAVA LUNGO y

PTO SELLA.

$\Downarrow$

PENSA ALLE PRINGLES!



EX. $f(x,y) = y \cdot \cos(x)$

- PTI CRITICI ? $\quad \overline{\nabla} f = \left[-\operatorname{sen}(x) \cdot y, \ \cos(x) \right]$

$$\begin{cases} -y \cdot \operatorname{sen}(x) = 0 \\ \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

MA $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \neq 0$ SEMPRE $\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow$ HO UN SET DI PTI CRITICI : $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$

- MAX O MIN ? COSTRUIAMO L'HESSIANO...

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \cdot \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & 0 \end{bmatrix}$$

VALUTIAMO IN (x_0, y_0)...

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

DEVO DISTINGUERE : 1) n = PARI $\Rightarrow$ $H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

NON È DIAGONALE ! $\Rightarrow$ $\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (-1)^2 = \lambda^2 - 1 = P(\lambda)$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ IN $(x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right)$ CON n = PARI

HO PT. DI SELLA.

2) CON n = DISPARI ? PROVARE...