ES. 1 : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)} = ?$ È IN $(0,0)$ $\Rightarrow$ POLARI : $x = R\cos\theta$, $y = R\,\text{sen}\,\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)} \rightsquigarrow \lim_{R\to 0} \frac{(R\cos\theta)(R^2\text{sen}^2\theta)}{(R^2\cos^2\theta + R^2\text{sen}^2\theta)} = \lim_{R\to 0} \frac{R^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{R^2\underbrace{(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)}_{=1}} = \lim_{R\to 0} \frac{R^{\cancel{3}}\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cancel{R^2}} = [0] \checkmark$$

ALTERNATIVA : $x^2+y^2 \geq 0$ SEMPRE

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \geq x^2 \\ x^2+y^2 \geq y^2 \end{cases}$ SEMPRE $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{y^2} \end{cases}$

COSTRUISCO I CARABINIERI (AHIMÈ...) :

$$\frac{xy^2}{(x^2+y^2)} \leq \frac{x\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = x = C_1(x,y) \qquad \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} C_1(x,y) \text{ ? sì! } \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

$$\frac{xy^2}{(x^2+y^2)} \geq -\frac{x\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} = -x = C_2(x,y) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} C_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (-x) = 0$$

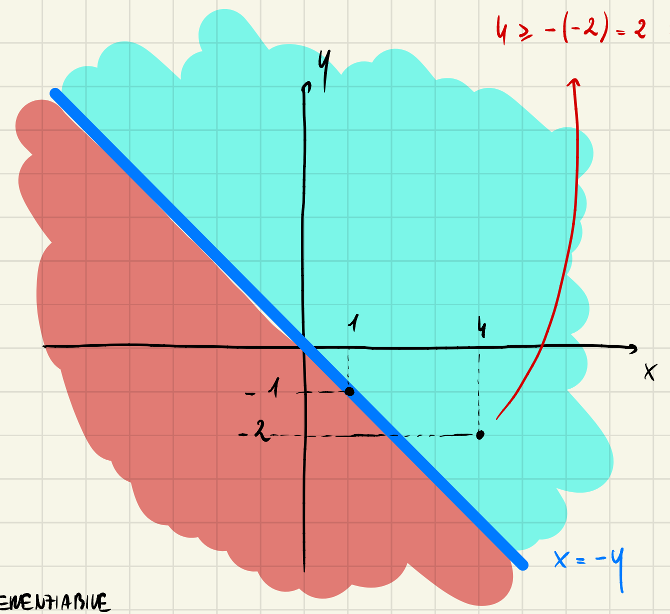
OTTIMO!

I LIMITI ESISTONO E SONO UGUALI $\Rightarrow$ USO I CARABINIERI...

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (-x)}_{\downarrow\ 0} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \leq \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} x}_{\downarrow\ 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{0} \ \checkmark$$



ES. 2: GRADIENTE DI $f(x,y) = x \cdot y \, e^{\sqrt{|x+y|}}$ IN $(0,0)$?

↳ $x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \Rightarrow x \geq -y$

$x+y < 0 \Rightarrow |x+y| = -x-y \Rightarrow x < -y$

$(0,0)$ STA PROPRIO SULLA FRONTIERA TRA LE DUE REGIONI...

↳ PER IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE LA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE E AMMETTE QUINDI IL GRADIENTE SE $\exists$ <u>CONTINUE</u> LE DERIVATE PARZIALI.

DOBBIAMO DISTINGUERE I 2 CASI...

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x} = y e^{\sqrt{x+y}} + xy e^{\sqrt{x+y}} \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}} = y e^{\sqrt{x+y}} \left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}} \right] \\ x+y < 0 \implies \dfrac{\partial f}{\partial x} = y e^{\sqrt{-x-y}} \left[1 - \dfrac{1}{2\sqrt{-x-y}} \right] \end{cases}$$

SE SOLO NELLA PARTE DI PIANO $\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} y e^{\sqrt{x+y}} \left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}} \right]$

" " " " " " $\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} y e^{\sqrt{-x-y}} \left[1 - \dfrac{1}{2\sqrt{-x-y}} \right]$

VEDIAMO SE SONO UGUALI, MA NOTA CHE:

$x = R\cos\theta \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta$ CON $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right]$ PER LA PARTE DI PIANO , MENTRE HO $\theta \in \left] \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right[$ PER LA PARTE .

$$\lim_{R\to 0} R\,\mathrm{sen}\,\theta\, e^{\sqrt{R}\sqrt{\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{R}\sqrt{\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta}} \right]$$

1) SE $\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta > 0$ ALLORA IL LIMITE È NULLO.

2) SE $\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta = 0$ COME IN $\theta = -\frac{\pi}{4}$ E $\theta = \frac{3}{4}\pi$

$\implies +\infty$ E NON ESISTE.

1) $\lim_{R \to 0} R\,\mathrm{sen}\theta \; e^{\sqrt{R}\sqrt{\cos\theta + \mathrm{sen}\theta}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{R}\sqrt{\cos\theta + \mathrm{sen}\theta}} \right] = 0$

2) $\lim_{R \to 0} R \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot e^{\sqrt{R}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{R}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}} \right] = -\infty$

ESPLODE!

$\Rightarrow$ IL LIMITE DIPENDE DA θ!

$\hookrightarrow$ NON VA BENE!

[$\frac{\partial f}{\partial x}$ NON È CONTINUA IN $(0,0)$ $\Rightarrow$ IL GRADIENTE NON ESISTE!]

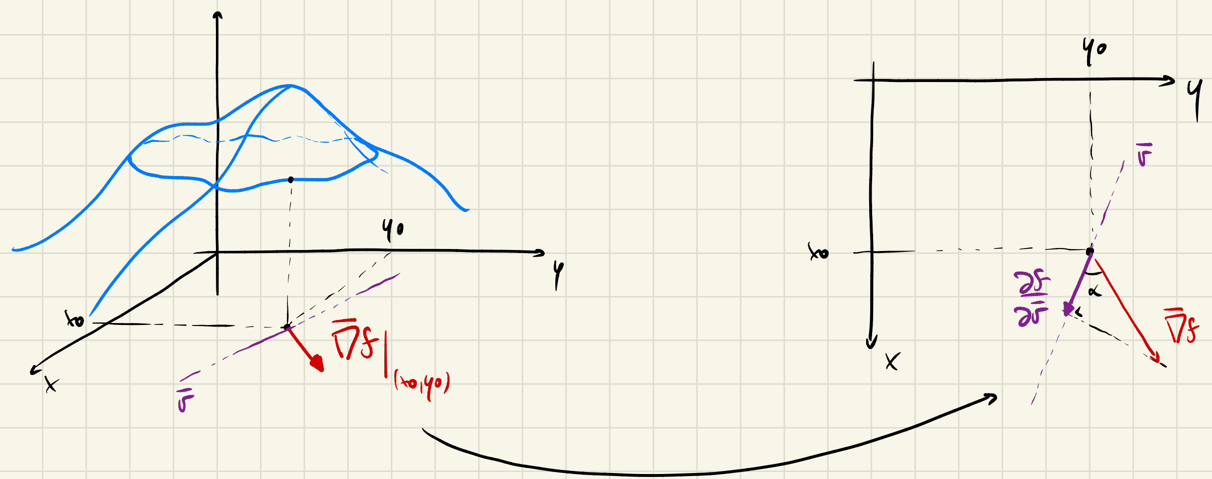
ES. 3: DERIVATA DIREZIONALE DI $x^2 + x \cdot y - 2$ IN $P = (1,0)$ E LUNGO $\bar{v} = [2,1]$

$\hookrightarrow$ ABBIAMO VISTO CHE IL GRADIENTE È IL VETTORE CHE CI INDICA LA DIREZIONE DI MASSIMA VARIAZIONE DI $f(x,y)$ IN UN PTO (x_0,y_0).

MA SE IO VOLESSI CALCOLARE QUANTO VALE LA DERIVATA NELLO STESSO PTO, MA IN UN'ALTRA DIREZIONE?

$$\left[\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\bar{\nabla} f\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \bar{v} \right] \oplus$$

PERCHÉ?



PROIETTO IL GRADIENTE SULLA DIREZIONE DESIDERATA!

COME SI PROIETTA? $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \bar{\nabla} f \cos\alpha = \bar{\nabla} f \cdot \bar{v}$ ⊛

NOTA: SE $\bar{v}$ NON È NORMALIZZATO $\Rightarrow$ DEVO NORMALIZZARLO IO!

$\bar{v} = [2, 1]$ $\quad \|v\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$ $\quad \Rightarrow \quad \bar{v} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{5}} [2, 1]$

$\bar{\nabla} f = ?$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$ $\quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla} f = [2x + y, x]$

$$\bar{\nabla} f\Big|_{(1,0)} = [2, 1] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \bar{\nabla} f\Big|_{(1,0)} \cdot \bar{v} = [2, 1] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = \boxed{\sqrt{5}} \checkmark$$