DEF. PRIMITIVA: $F(x)$ È PRIMITIVA DI $f(x)$ SE $F'(x) = f(x)$

TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE: $\int dx\, f(x) = F(x) \Rightarrow \int dx\, F'(x) = F(x)$

"CHAIN RULE"

1) $\int dx\, x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \int dx\, f'(x)\cdot(f(x))^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}\int dx\, \frac{d}{dx}\left((f(x))^{\alpha+1}\right) = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

2) $\int dx\, \frac{1}{x} = \ln(x) + c \qquad \int dx\, \frac{f'(x)}{f(x)} = \int dx\, \frac{d}{dx}\left(\ln(f(x))\right) = \ln(f(x)) + c$

3) $\int dx\, e^{x} = e^{x} + c \qquad \int dx\, f'(x)\, e^{f(x)} = \int dx\, \frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} + c$

4) $\int dx\, \cos(x) = \operatorname{sen}(x) + c \qquad \int dx\, f'(x)\cos(f(x)) = \int dx\, \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(f(x))\right) = \operatorname{sen}(f(x)) + c$

5) $\int dx\, \operatorname{sen}(x) = -\cos(x) + c \qquad \int dx\, f'(x)\operatorname{sen}(f(x)) = -\int dx\, \frac{d}{dx}\left(\cos(f(x))\right) = -\cos(f(x)) + c$

6) **PARTI:** $\int dx\, f(x)g(x) = F(x)g(x) - \int dx\, F(x)g'(x)$

DERIVO

INTEGRO

ES. 1: $\int_0^1 dx\ x \cdot \text{sen}(x^2) \qquad f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 dx\ \underbrace{(2x)}_{f'(x)}\ \text{sen}\underbrace{(x^2)}_{f(x)} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\ \frac{d}{dx}\left(\text{sen}(f(x))\right) = -\frac{1}{2}\cos(f(x))\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left[\cos(1^2) - \cos(0^2)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left[\cos(1) - 1\right]\right]$$

INTEGRALI DOPPI

SONO INTEGRALI NEL TIPO $\iint_D dx\,dy\ f(x,y)$

- LA CATEGORIA PIÙ SEMPLICE SONO QUELLI CON FUNZIONI A VARIABILI SEPARABILI OVVERO FUNZIONI CHE SODDISFANO: $\left[f(x,y) = g(x) \cdot h(y)\right]$

↳ Ex.
- $f(x,y) = \cos(x) \cdot \text{sen}(y) \qquad g(x) = \cos(x), \quad h(y) = \text{sen}(y)$
- $f(x,y) = (x^2 - 1) \cdot e^{y+x} = (x^2-1)e^y e^x = (x^2-1)e^x \cdot e^y \qquad g(x) = (x^2-1)e^x, \quad h(y) = e^y$

[Se $f(x,y)$ è separabile allora: $\iint dx\,dy\; f(x,y) = \left(\int_{D_x} dx\; g(x)\right)\cdot\left(\int_{D_y} dy\; h(y)\right)$] ⇝ Posso integrare le 2 variabili una alla volta e poi far il prodotto dei risultati.

Se non è così dobbiamo ingegnarci...

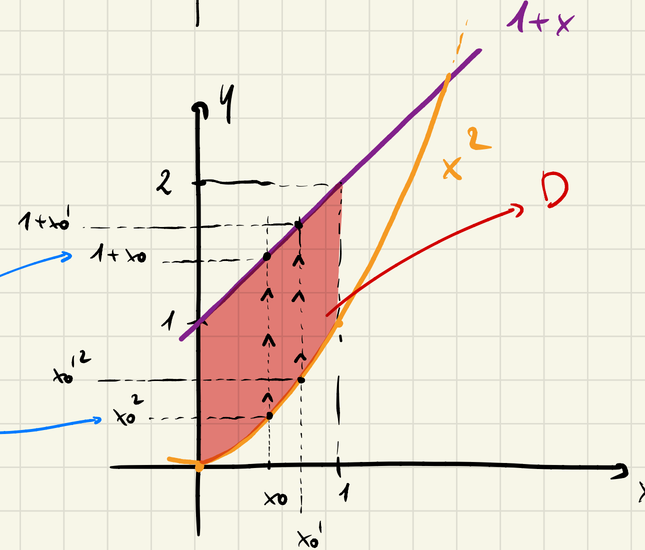
Es. 2: $\iint_D dx\,dy\,(xy)$ $\qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1+x\}$

Guardiamo al dominio di integrazione D...

Se mi metto in x_0 e provo a camminare lungo la linea tratteggiata è come se stessi facendo un integrale lungo una variabile sola: y

↳ sto integrando y in un intervallo $[x_0^2, 1+x_0]$

Se cambio x_0 e mi metto a camminare lungo x_0' allora l'intervallo cambia.



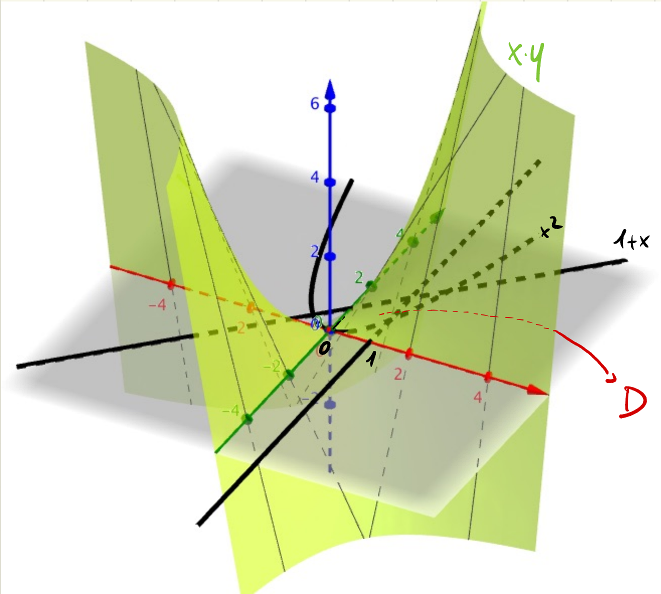
$$\Rightarrow \int_0^1 dx\; x \cdot \int_{x^2}^{1+x} dy\; y = \int_0^1 dx\; x\cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1+x} = \int_0^1 dx\; x\cdot\left[\frac{(1+x)^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,\left[x(1+x)^2 - x^5\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 dx\ x(x+1)^2 - \int_0^1 dx\ x^5 \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 dx\ x(x^2+1+2x) - \int_0^1 dx\ x^5 \right\}$$

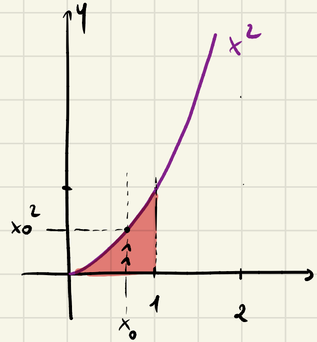
$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 dx\ x^3 + \int_0^1 dx\ x + 2\int_0^1 dx\ x^2 - \int_0^1 dx\ x^5 \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^6}{6} \right\}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right) - 0 \right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+6+8-2}{12} = \frac{15}{24} = \boxed{\frac{5}{8}}\ \checkmark$$

ABBIAMO CALCOLATO IL VOLUME TRA $f(x,y) = xy$ E IL PIANO IN GRIGIO, NEL DOMINIO D.



Es. 3: $\iint_D dx\,dy\,(x\cdot \text{sen}(x^2-y))$ $\qquad D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$



$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\; x\cdot\text{sen}(x^2-y) = \int_0^1 dx\; x \cdot \int_0^{x^2} dy\; \text{sen}(x^2-y)$$

$f(y)=x^2-y$

VISTO CHE INTEGRO SOLO IN y POSSO TRATTARE x^2 COME UNA COSTANTE.

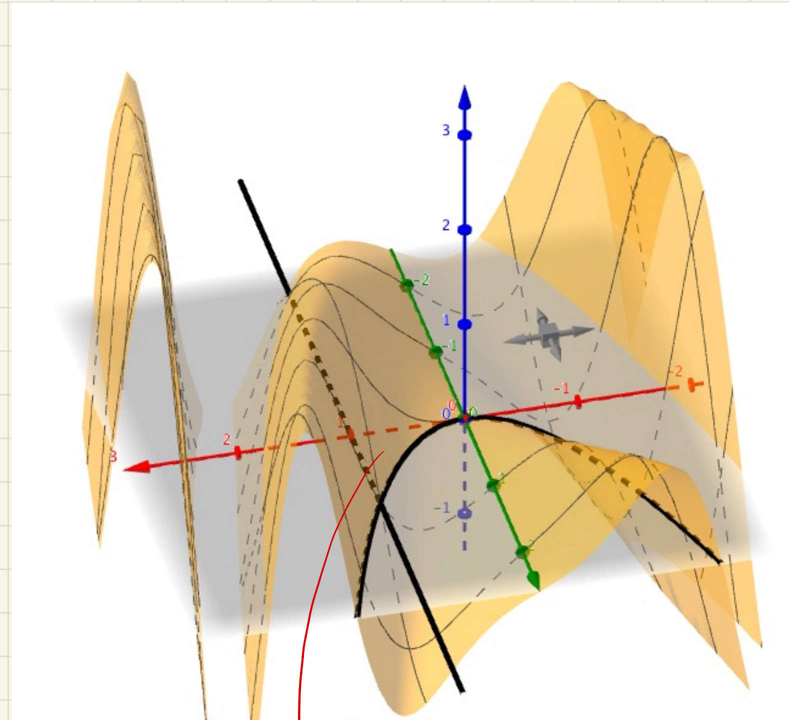
INTEGRO PRIMA IN y...

$f(y)=x^2-y \qquad \frac{df}{dy}=-1$

$$\Rightarrow -1\int_0^{x^2} dy\,\overset{f'(y)}{(-1)}\,\text{sen}\,\overset{f(y)}{(x^2-y)} = -\left(-\cos(x^2-y)\right)\Big|_0^{x^2} = \cos(x^2-y)\Big|_0^{x^2} = \cos(x^2-x^2)-\cos(x^2) = 1-\cos(x^2)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx\; x(1-\cos(x^2)) = \int_0^1 dx\; x - \int_0^1 dx\; x\cos(x^2) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,(2x)\cos(x^2) = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\text{sen}(x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{sen}(1) = \left[\frac{1}{2}(1-\text{sen}(1))\right] \checkmark$$



D