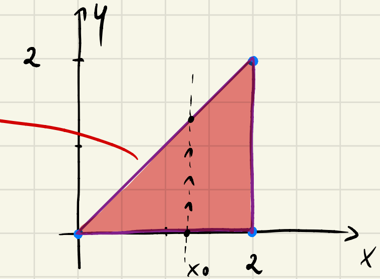
ES. 1

$$\iint_D 2y^2 \,\text{sen}(xy)\, dx\, dy$$

D È IL TRIANGOLO DI VERTICI $(0,0),(2,2),(0,2)$

CHE EQN HA?



$$y = mx + q$$

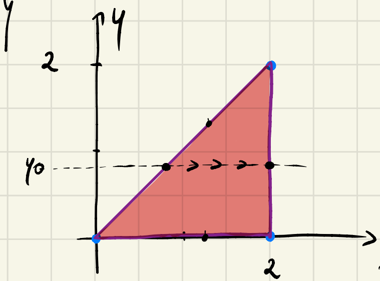
$$\begin{cases} q = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = x$$

$\Rightarrow$ x VA INTEGRATA DA $0 \to 2$

y VA INTEGRATA DA $0 \to x$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le x\}$$



UN'ALTERNATIVA È INTEGRARE IN "ORIZZONTALE", INVECE CHE IN "VERTICALE".

$$\int_0^2 dy \int_y^2 dx\, 2y^2 \,\text{sen}(xy) = \int_0^2 dy\, (2y^2) \underbrace{\int_y^2 dx\, \text{sen}(xy)}_{①}$$

① $$\int_y^2 dx\, \text{sen}(xy) = \frac{1}{y}\int_y^2 dx\, (y \cdot \text{sen}(xy)) = \frac{1}{y}(-\cos(xy))\Big|_y^2 = -\frac{1}{y}\cos(xy)\Big|_y^2 = -\frac{1}{y}\cos(2y) + \frac{1}{y}\cos(y^2)$$

$$\Rightarrow \int_0^2 dy\,(2y^2)\cdot\left(-\frac{1}{y}\cos(2y)+\frac{1}{y}\cos(y^2)\right) = \int_0^2 dy\,(-2y)\cdot\cos(2y) + \int_0^2 dy\,\overset{h'(y)}{(2y)}\cos\big(\overset{h(y)}{y^2}\big)$$

$$= 2\int_0^2 dy\,(-y\cdot\cos(2y)) + \text{sen}(y^2)\Big|_0^2$$

??? ⊛

$$⊛\quad -2\int_0^2 dy\; y\cdot\cos(2y) = -\int_0^2 dy\;\overset{f(y)}{y}\,\overset{g'(y)}{(2\cdot\cos(2y))} = -\left[y\cdot\text{sen}(2y)\Big|_0^2 - \int_0^2 dy\,(1)\cdot\text{sen}(2y)\right]$$

$$= -\left[y\cdot\text{sen}(2y)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 dy\,(2\cdot\text{sen}(2y))\right] = -\left[y\cdot\text{sen}(2y)\Big|_0^2 - \frac{1}{2}(-\cos(2y))\Big|_0^2\right]$$

$$= -\left[2\cdot\text{sen}(4) - 0 + \frac{1}{2}(\cos(4)-1)\right] = -2\cdot\text{sen}(4) - \frac{1}{2}(\cos(4)-1)$$

$$\Rightarrow -2\,\text{sen}(4) - \frac{1}{2}(\cos(4)-1) + \text{sen}(4) = -\text{sen}(4) - \frac{1}{2}\cos(4) + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(1-\cos(4)-2\cdot\text{sen}(4))}\ ✓$$

ES. 2: $\int_0^2 dx \frac{x}{x^2-4}$

GRADO DEL DENOMINATORE > GRADO DEL NUMERATORE

$\Downarrow$

SCOMPOSIZIONE NEI FRATTI SEMPLICI

$$= \int_0^2 dx \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

EGUAGLIO I COEFFICIENTI CON LO STESSO GRADO TRA QUESTI DUE.

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ \cancel{2}A-\cancel{2}B=0, \quad A=B \end{cases} \Rightarrow 2A=1, \quad A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 dx \left[\frac{\frac{1}{2}}{(x-2)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)}\right] = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^2 dx \frac{1}{(x-2)}}_{①} + \frac{1}{2}\int_0^2 dx \frac{1}{x+2}$$

① SOSTITUZIONE: $y = x-2 \Rightarrow dy = \frac{d}{dx}(x-2)\cdot dx = dx$

$$\Rightarrow \int_0^2 dx\, \frac{1}{x-2} = \int_{-2}^0 dy\, \frac{1}{y} = \ln(y)\Big|_{-2}^{0} = -\infty - \left(\ln(-2)\right)$$

ESPLODE

$\ln(x)$ NON È DEFINITO PER REALI NEGATIVI.

$\Rightarrow$ [L'INTEGRALE NON ESISTE.] ✓

POTEVAMO ACCORGERCENE GIÀ ALL'INIZIO $\int_0^2 dx\, \frac{x}{x^2-4}$ IN $x=2$ LA FUNZIONE ESPLODE, GIÀ QUESTO NON PROMETTE BENE, MA POTREBBE ESSERE INTEGRABILE.

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)}$$

QUESTO È IL PEZZO CHE ESPLODE.

$\rightarrow$ SE ESPLODESSE CON UNA POTENZA < 1 ALLORA SAREBBE INTEGRABILE...

Ex. $\frac{x}{\sqrt{x-2}\,(x+2)}$ È INTEGRABILE IN $x=2$ ANCHE SE ESPLODE!

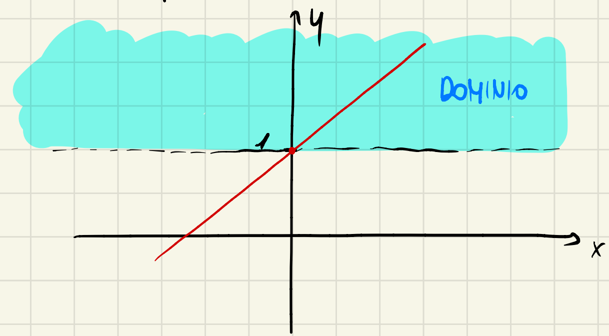
ES. 3: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^2 - 1 + \operatorname{sen}(x)}{x + \sqrt{y-1}}$ È UNA FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$!

TAYLOR: $\operatorname{sen}(x)$ INTORNO A $x=0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}(x) \simeq x$

$\Rightarrow$ POSSIAMO STUDIARE: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^2-1+x}{x+\sqrt{y-1}} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y+1)(y-1)+x}{x+\sqrt{y-1}}$

INTANTO NOTIAMO CHE $f(x,y)$ NON ESISTE PER $y<1$ A CAUSA DI $\sqrt{y-1}$

CERCHIAMO UN FASCIO DI RETTE CHE PASSA PER $(0,1)$:



$$(y-1) = m(x-0) \Rightarrow \begin{array}{l} y-1 = mx \\ y = mx+1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(mx+1)\cdot mx + x}{x + \sqrt{mx}}$$

SE $m=0$ ALLORA LA RETTA È ORIZZONTALE, AL BORDO DEL DOMINIO, È UN CASO PARTICOLARE, PROVIAMO A STUDIARE DUE CASI.

i) $m = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

ii) $m > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(mx+1) \cdot mx + x}{x + \sqrt{mx}} = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x^2 + x(m+1)}{x + \sqrt{mx}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(m^2 x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(m+1)\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{m}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 \overset{0}{x^{\frac{3}{2}}} + \overset{0}{\sqrt{x}}(m+1)}{\underset{0}{\sqrt{x}} + \underset{\sqrt{m}}{\sqrt{m}}} = 0$$

iii) $m < 0$ LA FUNZIONE NEANCHE ESISTE $\lim_{x \to 0} \frac{m^2 x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}(m+1)}{\sqrt{x} + \sqrt{m}} = 0$

m NON PUÒ ESSERE NEGATIVO.

$\Rightarrow$ IL LIMITE DIPENDE DA m $\Rightarrow$ NON ESISTE!