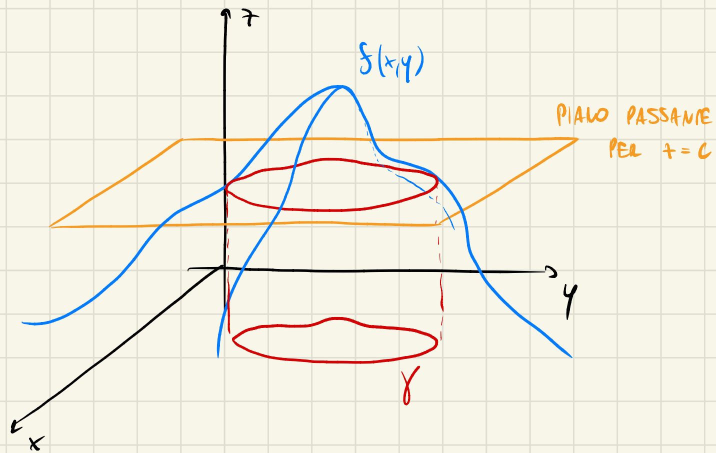
PUNTI STAZIONARI VINCOLATI

DEF. DATA $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ LA CURVA DI LIVELLO DI f È DEFINITA $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } f(x,y) = c, \text{ con } c \in \mathbb{R}\}$

POSSO DECIDERE DI CAMMINARE SU γ...

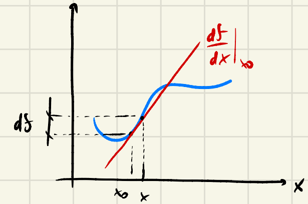


COS'HANNO DI PARTICOLARE LE CURVE DI LIVELLO? LA FUNZIONE f LUNGO γ NON CAMBIA MAI PERCHÉ ABBIAMO DETTO CHE È UGUALE AD UNA COSTANTE c!

COSA IMPLICA QUESTO? CHE IL ∇f SIA SEMPRE PERPENDICOLARE ALLE CURVE DI LIVELLO!

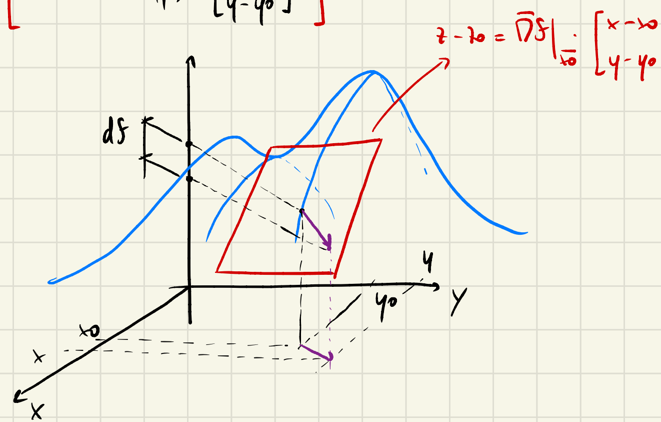
DIMOSTRIAMOLO...

IN 1 VARIABILE AVEVAMO: $df = \left(\frac{df}{dx}\right)\Big|_{x_0} \cdot (x - x_0)$



LA DERIVATA DI f È LA MIGLIOR APPROSSIMANTE LINEARE IN x_0, ALLORA POSSO CALCOLARE df, CHE È L'INCREMENTO INFINITESIMO SULLE ORDINATE.

IN 2 VARIABILI È LA STESSA COSA, MA DEVO USARE IL GRADIENTE: $\left[df = \bar{\nabla} f\Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \right]$

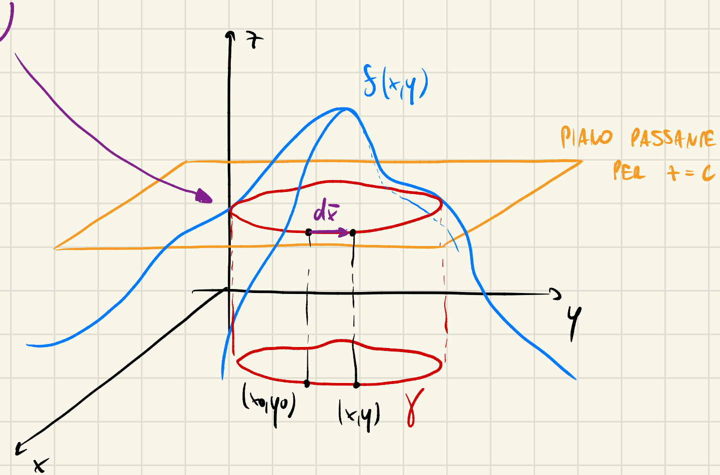


COSA SUCCEDE SE MI SPOSTO LUNGO UNA CURVA DI LIVELLO?

↳ IMMAGINIAMO DI CAMMINARCI E PRENDIAMO $\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = d\bar{x}$ COME IN FIGURA SOTTO

$$df = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \bar{\nabla} f\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}}_{\equiv\, d\bar{x}} = \bar{\nabla} f\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot d\bar{x}$$

⊛



MA SIA (x,y) CHE (x_0,y_0) APPARTENGONO ALLA CURVA DI LIVELLO...

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x_0,y_0) = c$$

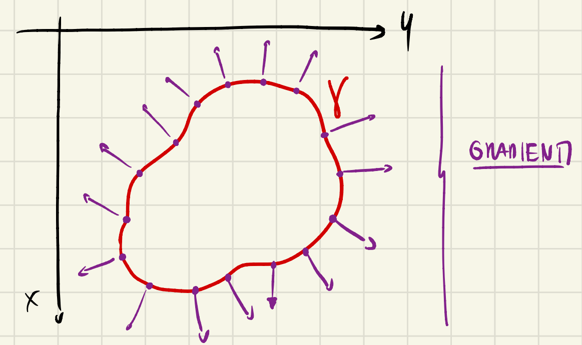
$$⊛ \Rightarrow c - c = \bar{\nabla} f\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot d\bar{x}$$

$$\Rightarrow 0 = \bar{\nabla} f\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot d\bar{x}$$

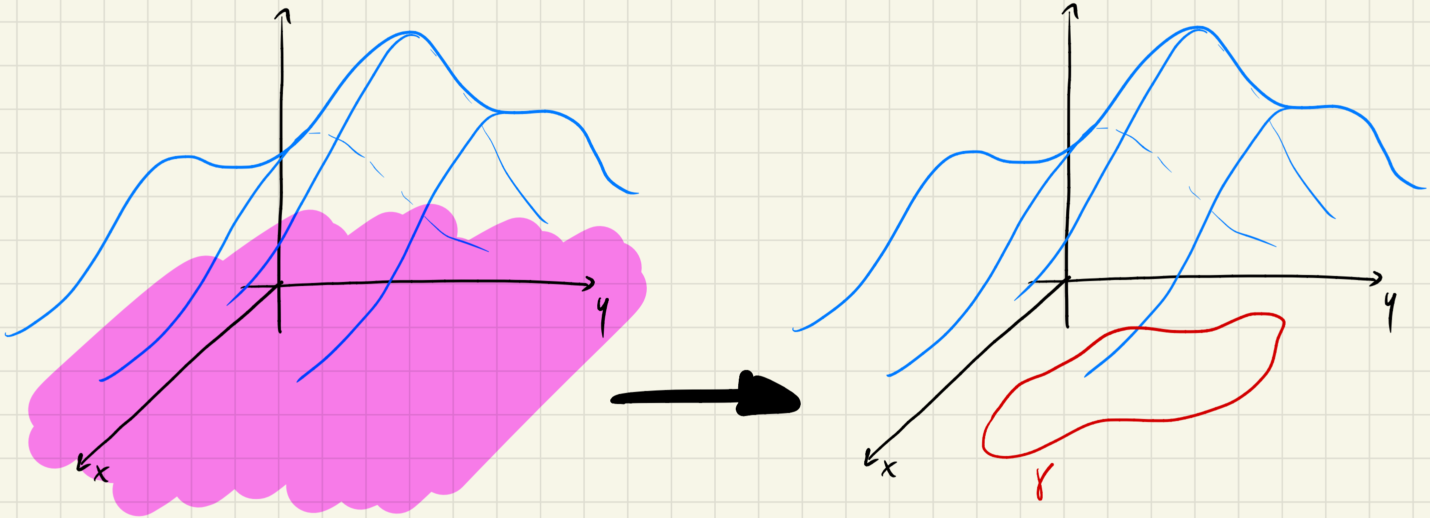
(★)

$\Rightarrow$ VISTO CHE $d\bar{x}$ È TANGENTE A γ QUESTO CI DICE CHE IL $\bar{\nabla} f$ È PERPENDICOLARE A γ IN OGNI PUNTO.

↳ VISUALIZZIAMO:



NORMALMENTE ABBIAMO CERCATO I PTI CRITICI SU TUTTO $\mathbb{R}^2$, LIBERI COME FRINGUELLI, MA COSA SUCCEDE SE CI CHIEDONO DI CERCARE I MAX E MIN LUNGO UNA CURVA BEN PRECISA?



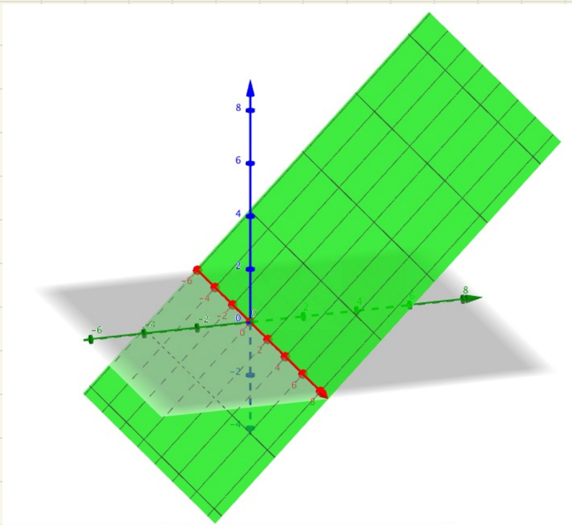
PRIMA: CERCAVAMO SU TUTTO IL DOMINIO DELLA FUNZIONE (SU TUTTO IL PIANO xy)

ORA: CERCHIAMO MIN E MAX LUNGO γ!

↳ SIAMO VINCOLATI!

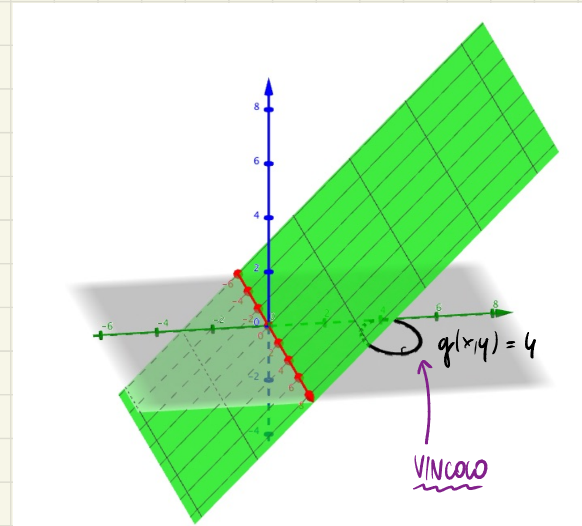
ABBIAMO BISOGNO DI DUE COSE: i) $f(x,y)$ DA MINIMIZZARE O MASSIMIZZARE

ii) γ CHE CHIAMEREMO <u>VINCOLO</u>. NON È NIENT'ALTRO CHE LA CURVA DI LIVELLO DI UN'ALTRA FUNZIONE $g(x,y)$!



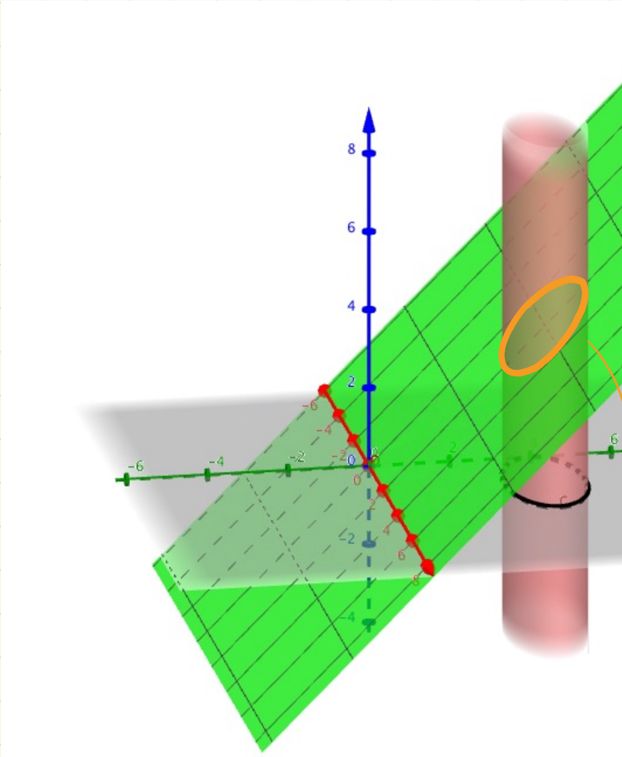
$f(x,y) = y$ (UN PIANO)

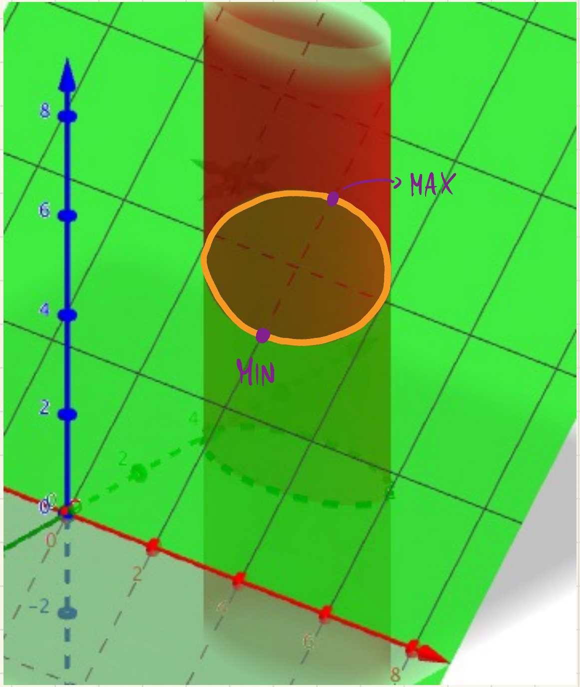
SU $\mathbb{R}^2$ NON HA MASSIMI O MINIMI.



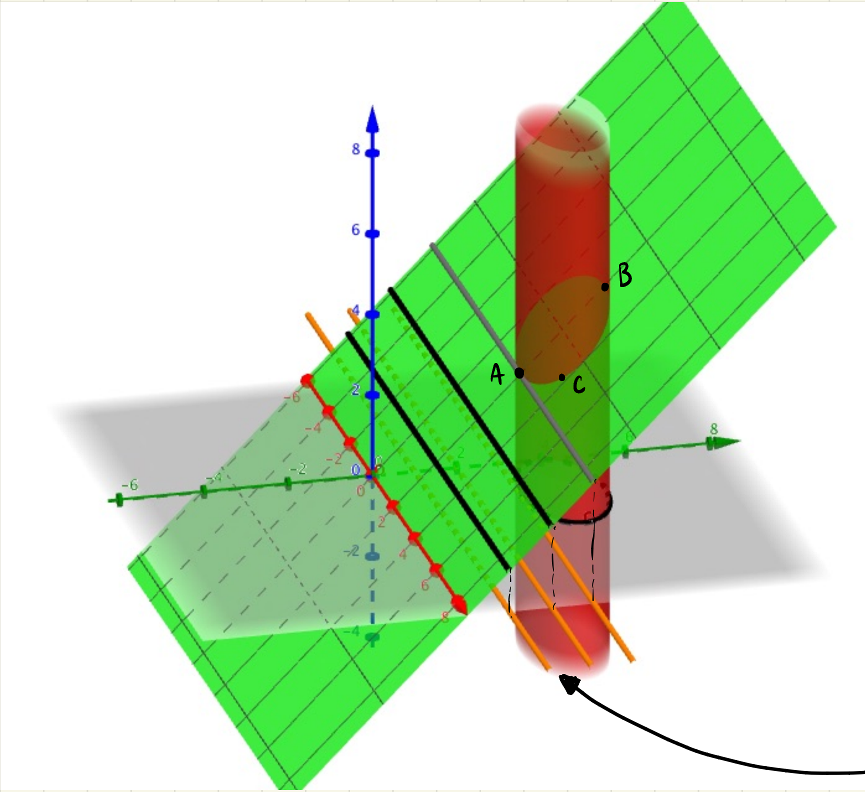
<u>FUNZIONE</u>: $g(x,y) = (x-2)^2 + 2(y-4)^2$

<u>VINCOLO</u>: $g(x,y) = 4$





$f(x,y)$ SUL VINCOLO HA SIA MAX CHE MIN !

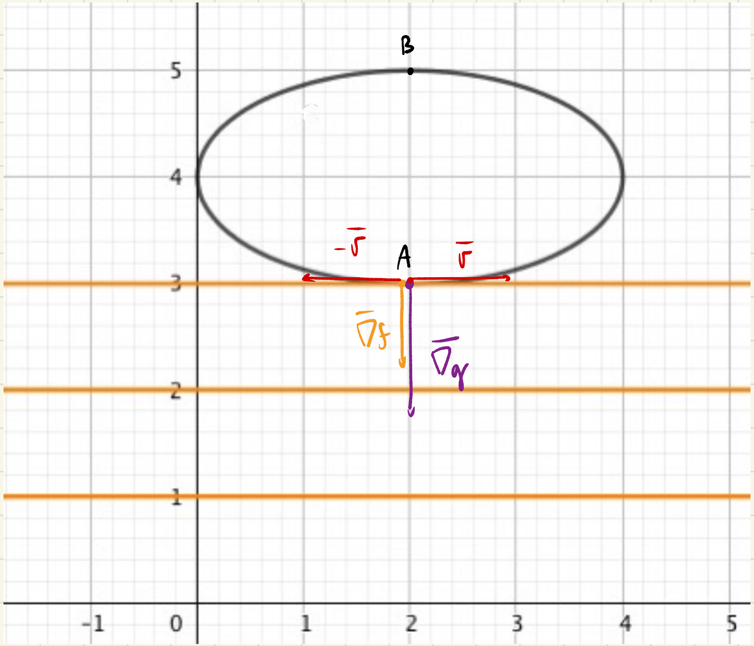


IN ARANCIO CI SONO LE CURVE DI LIVELLO DI $f(x,y)$.
OTTENUTE DALL'INTERSEZIONE DI $f(x,y)$ CON PIANI AD ALTEZZE DIVERSE.

Ex. $f(x,y) = y$

$z = 1$ (PIANO) $\Rightarrow$ $y = 1$

GUARDIAMO ALLE CURVE DI LIVELLO SUL PIANO xy, LORO CONTENGONO TUTTA L'INFORMAZIONE NECESSARIA.



IN FIGURA UNA CURVA DI LIVELLO DI $f(x,y)$ È TANGENTE AL VINCOLO, OVVERO ALLA CURVA DI LIVELLO DI $g(x,y)$.

$\bar{\nabla} f$ È $\perp$ ALLA CURVA DI LIVELLO DI f PER QUELLO CHE ABBIAMO VISTO IN (★): IL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE È SEMPRE $\perp$ ALLA CURVA DI LIVELLO.

NEL PTO DI INTERSEZIONE PERÒ $\bar{\nabla} f$ È $\perp$ ANCHE AL VINCOLO !!!

ALLORA PROVO A CALCOLARE LA DERIVATA DIREZIONALE LUNGO DELLE DIREZIONI TANGENTI AL VINCOLO: $\bar{v}, -\bar{v}$.

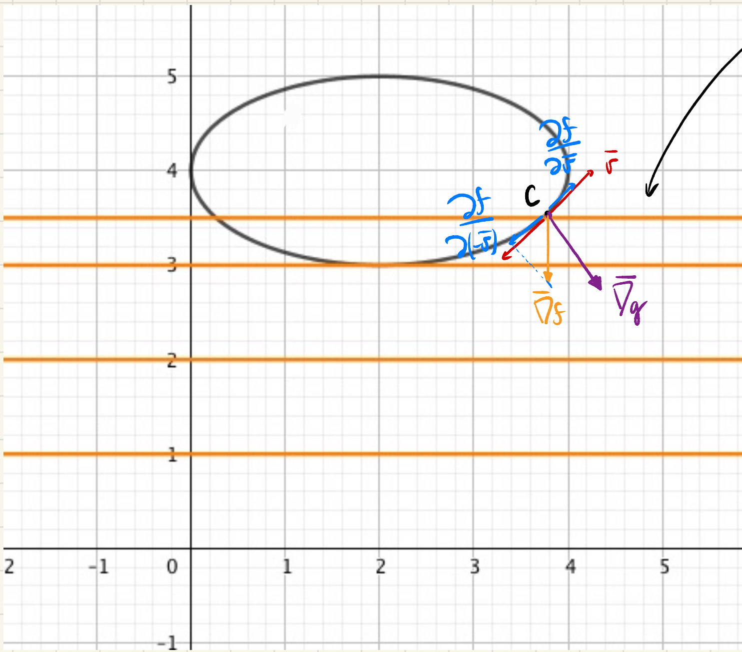
$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \bar{\nabla} f \cdot \bar{v} = 0$ PERCHÉ $\bar{\nabla} f \perp$ A $\bar{v}$.

$\frac{\partial f}{\partial (-\bar{v})} = \bar{\nabla} f \cdot (-\bar{v}) = 0$ 〃 〃 〃 〃 $-\bar{v}$.

! => SIGNIFICA CHE LA FUNZIONE f IN A NON VARIA SE MI SPOSTO LUNGO IL VINCOLO !

=> A È UN PTO STAZIONARIO ! => È UN CANDIDATO AD ESSERE MAX, MIN O SELLA !!! !

¡[**NOTA:** LA MAGIA AVVIENE QUANDO IL $\bar{\nabla} f$ E IL $\bar{\nabla} g$ SONO **PARALLELI** !!!]!



SE CONSIDERIAMO QUESTA CURVA DI LIVELLO DELLA f ?

IN QUESTO CASO: $\bar{\nabla} f \perp$ ALLA CURVA DI LIVELLO DI f

$\bar{\nabla} g \perp$ AL VINCOLO.

COME PRIMA... MA LE DERIVATE DIREZIONALI ?

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = \bar{\nabla} f \cdot \bar{v} \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial(-\bar{v})} = \bar{\nabla} f \cdot (-\bar{v}) \neq 0$$

PERCHÉ $\bar{v}, -\bar{v}$ E $\bar{\nabla} f$ NON SONO $\perp$!

IN PIÙ $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial f}{\partial(-\bar{v})}$ IN QUESTO CASO, QUINDI SIGNIFICA CHE LUNGO UNA DIREZIONE f CRESCE E NELL'ALTRA DECRESCE.

¡[=> SE MI SPOSTO LUNGO IL VINCOLO f VARIA => © NON È UN PTO STAZIONARIO!
=> NON È UN BUON CANDIDATO COME MAX O MIN!]!

¡[**NOTA:** IN QUESTO TIPO DI PUNTI IL $\bar{\nabla} f$ **NON** È PARALLELO AL $\bar{\nabla} g$!!!]!

QUANDO SI DICE CHE DUE VETTORI SONO PARALLELI? QUANDO POSSO SCRIVERE CHE: $\bar{a} = \ell \bar{b}$

↳ NEL NOSTRO CASO I PTI. CANDIDATI AD ESSERE MINIMI O MAX VINCOLATI SONO QUELLI IN CUI $\bar{\nabla} f$ È PARALLELO AL $\bar{\nabla} g$:

$$\boxed{\bar{\nabla} f = \ell \bar{\nabla} g}$$

→ MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE.