Esercizio 1

Considera la teoria di Yukawa con azione "bare"

$$S = \int d^4x \left[i\bar{\psi}_B \partial\!\!\!/ \psi_B - M_B \bar{\psi}_B \psi_B + \frac{1}{2}(\partial\phi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2}\phi_B^2 - y_B \phi_B \bar{\psi}_B \psi_B - \frac{\lambda_B}{4!}\phi_B^4 \right] . \tag{1}$$

Riscrivila in funzione delle variabili rinormalizzate sostituendo $\psi_B = \sqrt{Z_\psi}\psi$, $\phi_B = \sqrt{Z_\phi}\phi$, $M_B = Z_M M$, $m_B^2 = Z_m^2 m^2$, $y_B = Z_y y$ e $\lambda_B = Z_\lambda \lambda$. Poi poni $Z = 1 + \delta Z$ ed espandi al prim'ordine in δZ, separando l'azione rinormalizzata dai controtermini. Abbiamo calcolato in classe δZ_ϕ e $\delta Z_m^2 m^2$, lo scopo dell'esercizio è completare la rinormalizzazione a un loop di questa teoria. Svolgi l'esercizio usando dimreg come regolatore, e $\overline{\text{MS}}$ come schema di rinormalizzazione.

(i) Calcola il contributo a un loop alla due punti 1PI del campo di Dirac, imponi che la due punti sia finita aggiungendo il contributo dei controtermini e quindi calcola δZ_ψ e $\delta Z_M M$.

(ii) Calcola il contributo a un loop alla tre punti 1PI $\langle \phi \bar{\psi} \psi \rangle$. Per semplificare il calcolo, metti a zero il momento su tutte le zampe esterne. Imponi che la tre punti sia finita aggiungendo il contributo dei controtermini, e quindi (usando che conosci già δZ_ϕ e δZ_ψ) calcola $\delta Z_y y$.

(iii) Calcola il contributo a un loop alla quattro punti 1PI $\langle \phi\phi\phi\phi \rangle$. Nota che una parte di questa 4 punti dipende solo da λ ed è identica a quella della teoria $\lambda\phi^4$ calcolata in classe, per cui puoi riutilizzare quel risultato. Nota che peró c'è anche un contributo addizionale che dipende solo da y. Calcolalo mettendo a zero il momento sulle zampe esterne. Imponi che la quattro punti sia finita aggiungendo il contributo dei controtermini, e quindi (usando che conosci già δZ_ϕ) calcola $\delta Z_\lambda \lambda$. Nota quindi che $\delta Z_\lambda \lambda \neq 0$ anche per $\lambda = 0$.

Esercizio 2

Considera la QED scalare con azione

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu z)(D^\mu z)^* - m^2 z^* z \right] , \tag{2}$$

dove $D_\mu z = (\partial_\mu - ieA_\mu)z$, $(D_\mu z)^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)z^*$. Calcola la correzione a un loop alla due punti 1PI del fotone

$$\langle A_\mu(q) A_\nu(-q) \rangle|_{\text{1PI}} \equiv i\Pi_{\mu\nu}(q) . \tag{3}$$

Per regolare la divergenza UV, usa prima dimreg e poi un cutoff Λ. Nota che usando dimreg la correzione è trasversa, ovvero

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\Pi(q^2) , \tag{4}$$

come richiesto dall'invarianza di gauge, mentre questa proprietà non è soddisfatta usando il cutoff. Come spieghi questa differenza?