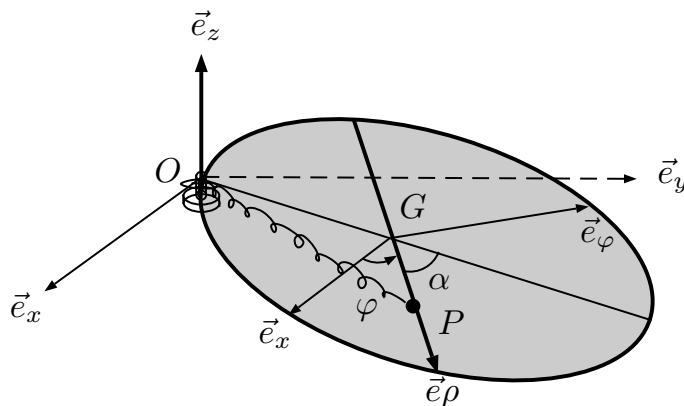


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 11 Settembre 2023. (G. Tondo)



Un rigido è costituito da un disco di raggio R e massa M . Esso è vincolato mediante una cerniera cilindrica ad un asse fisso $(O, \vec{e}_z)$ verticale passante per il bordo del disco. Inoltre, sul disco è appoggiato un punto materiale P di massa m , vincolato a scorrere senza attrito su una guida solidale al disco, passante per il centro G e inclinata di un angolo α rispetto al diametro per O e G . Sul disco agisce una molla angolare di richiamo con asse verticale e costante elastica b , posta in O ; sul punto P una molla di costante elastica c , fissata in O alla cerniera cilindrica. Inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $\varphi \in \mathbb{R}$ l'angolo compreso tra la posizione di riposo della molla, individuata dal versore $\vec{e}_x$ e il versore $\vec{e}_\rho$ e con $-R \leq s \leq R$ la coordinata di P lungo la guida rispetto al punto G .

STATICA.

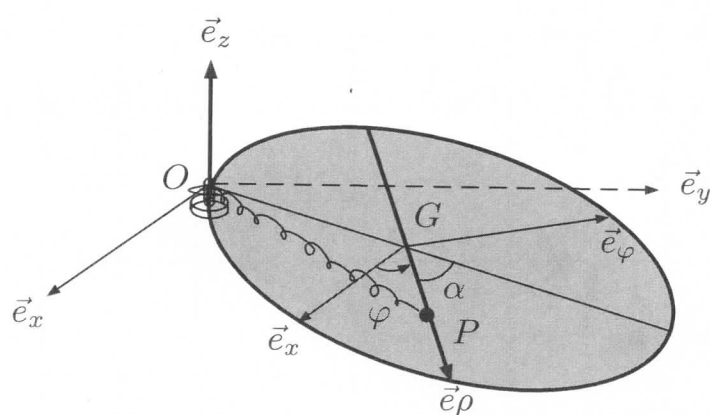
- 1) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
- 2) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilindrica in O sul rigido;
- 3) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, del disco sul punto P .

DINAMICA.

Si chiede di:

- 4) scrivere le equazioni pure di moto;
- 5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;
- 6) Dire se le soluzioni delle equazioni del punto 5 sono periodiche (senza calcolarle) e, in caso di risposta positiva, qual è la procedura per calcolarne il periodo. Infine, dire sotto quali condizioni il moto linearizzato complessivo è periodico.

Il modello è costituito da un rigido R (disco + asse), con asse fisso e da un punto materiale vincolato al disco. Con il metodo dei congelamenti successivi si può concludere che i gradi di libertà sono 2. Un sistema di coordinate libere sono $q = (\varphi, s)$ con $\varphi \in \mathbb{R}$, $-R \leq s \leq R$ (vedi figure).



Utilizziamo 2 basi:

$$B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \quad \text{base fissa a terra}$$

$$B' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z) \quad \text{base solidale al disco}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{P}-\vec{O} &= (\vec{P}-\vec{G}) + (\vec{G}-\vec{O}) = s \vec{e}_r + R(\cos \alpha \vec{e}_s + \sin \alpha \vec{e}_\varphi) \\ &= (s + R \cos \alpha) \vec{e}_r + R \sin \alpha \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{P}-\vec{O}|^2 &= (s + R \cos \alpha)^2 + R^2 \sin^2 \alpha = (s^2 + 2sR \cos \alpha + R^2 \cos^2 \alpha) + R^2 \sin^2 \alpha \\ &= s^2 + 2sR \cos \alpha + R^2 \end{aligned}$$

1) Equilibri

la sollecitazione attiva ~~è~~ esterna (peso + molle angolari)
~~la molla è conservativa~~ (molla $\neq$ è conservativa). Quindi
 possiamo calcolare l'energia potenziale
 (sempre definita a meno di una costante additiva;

$$\begin{aligned} V(\varphi, s) &= \frac{1}{2} b \varphi^2 + \frac{1}{2} c |\vec{P}-\vec{O}|^2 = \\ &= \frac{1}{2} b \varphi^2 + \frac{1}{2} c (s^2 + 2sR \cos \alpha + R^2) \\ &\approx \frac{1}{2} b \varphi^2 + \frac{1}{2} c (s^2 + 2sR \cos \alpha) \end{aligned}$$

Cerchiamo i punti stazionari di V .

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = b \varphi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} b \varphi = 0 \\ s + R \cos \alpha = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = c(s + R \cos \alpha) = 0$$

Dunque, $\exists!$ $q_e = (\varphi_e, s_e) = (0, -R \cos \alpha)$ $s_e \in]-R, 0$

Per determinarne la stabilità, classifichiamo il punto stazionario.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = b, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = c$$

Quindi la matrice Hessianiana è

$$H_v = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \det H_v = bc > 0$$

$$H_{11} = b > 0 \Rightarrow \text{p.e. minimo} \downarrow \text{stabilità}$$

2) La sollecitazione relativa esercitata da una cerniera cilindrica fissa e lineare è

$$\mathcal{L}^{(ext)} = \{ (0, \vec{\phi}), \vec{\mu} \} \quad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Scriviamo le ECS

$$\begin{cases} \vec{R}^{(ext, att)} + \vec{\phi}_0 = \vec{0} \\ \vec{M}_0^{(ext, att)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi}_0 = -\vec{R}^{(ext, att)} \\ \vec{\mu} = -\vec{M}_0^{(ext, att)} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(ext, att)} = (M+m)\vec{g} - c(P-O) \Big|_{\vec{g}_e} = -(M+m)g\vec{e}_z - cR \sin \alpha \vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{\phi}_0 = cR \sin \alpha \vec{e}_\varphi + (M+m)g\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_0^{(ext, att)} = (G-O) \times M\vec{g} + (P-O) \times m\vec{g} - b\varphi \vec{e}_z. \quad \text{Quindi}$$

$$\vec{M}_0^{(ext, att)} \Big|_{\vec{g}_e} = (G-O) \times (-Mg\vec{e}_z) + [(P-G) + (G-O)] \times (-mg\vec{e}_z)$$

Dimostrar,

$\vec{M}_O^{(ext, ext)}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= R(\cos \alpha \vec{e}_\rho + \sin \alpha \vec{e}_\varphi) \times (M+m)(-g \vec{e}_z) + [s \vec{e}_\rho \times m(-g) \vec{e}_z] \\ &= -(M+m)g [R \cos \alpha (-\vec{e}_\varphi) + R \sin \alpha \vec{e}_\rho] - mg s (-\vec{e}_\varphi) \\ &= [(M+m)g R \cos \alpha + mg s] \vec{e}_\varphi - (M+m)g R \sin \alpha \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

Quindi

$\vec{M}_O^{(ext, ext)}|_{q_e}$

$$= [Mg R \cos \alpha + mg R \cos \alpha - mg R \cos \alpha] \vec{e}_\varphi - (M+m)g R \sin \alpha \vec{e}_\rho$$

Dimostrar

$$\vec{\mu} = (M+m)g R \sin \alpha \vec{e}_\rho - Mg R \cos \alpha \vec{e}_\varphi$$

3) Prova che in P all'equilibrio

$$\vec{F}_P^{(ext)} + \vec{\Psi}_P = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\Psi}_P = -\vec{F}_P^{(ext)}$$

$$\vec{F}_P^{(ext)} = m \vec{g} - c(P-O) = -mg \vec{e}_z - c[(s+R \cos \alpha) \vec{e}_\rho + R \sin \alpha \vec{e}_\varphi]$$

$$\vec{F}_P^{(ext)}|_{q_e} = -mg \vec{e}_z - c R \sin \alpha \vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{\Psi}_P = mg \vec{e}_z + c R \sin \alpha \vec{e}_\varphi$$

4) Eq. pure di moto

15

Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo

$$K = K^{(R)} + K^{(P)}$$

$$K^{(R)} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_0(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_z \cdot \vec{I}_0(\dot{\varphi} \vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \vec{e}_z \cdot \vec{I}_0(\vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{I}_0(\vec{e}_z) = \vec{e}_z \cdot \vec{I}_G(\vec{e}_z) + \vec{e}_z \cdot M(G-O) \times (\vec{e}_z \times (G-O))$$

Quindi

$$I_{Oz} = I_{Gz} + M R^2 \quad (\text{Teo di Huygens-Steiner})$$

$$I_{Oz} = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2$$

Dunque,

$$K^{(R)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M R^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P^{(cm)} = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

$$\vec{v}_P^{(rel)} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$\vec{v}_P^{(rel)}$: vs. alla terra ($G; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$)
 $\vec{v}_P^{(cm)}$: vs. alla terra ($O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$)

$$\begin{aligned} \vec{v}_P^{(tr)} &= \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (P-G) = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (G-O) + \vec{\omega} \times (P-G) = \vec{\omega} \times (P-O) \\ &= \dot{\varphi} \vec{e}_z \times [(\rho + R \cos \alpha) \vec{e}_\varphi + R \sin \alpha \vec{e}_\rho] = \dot{\varphi} [(\rho + R \cos \alpha) \vec{e}_\theta - R \sin \alpha \vec{e}_\varphi] \end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{v}_P^{(m)} = (\dot{s} - R \sin \alpha \dot{\varphi}) \vec{e}_r + (s + R \cos \alpha) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{v}_P|^2 = (\dot{s} - R \sin \alpha \dot{\varphi})^2 + (s + R \cos \alpha)^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \dot{s}^2 - 2R \sin \alpha \dot{s} \dot{\varphi} + R^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + (s^2 + 2Rs \cos \alpha + R^2 \cos^2 \alpha) \dot{\varphi}^2$$

$$= \dot{s}^2 - 2R \sin \alpha \dot{s} \dot{\varphi} + (R^2 + s^2 + 2Rs \cos \alpha) \dot{\varphi}^2$$

Dunque

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m [\dot{s}^2 - 2R \sin \alpha \dot{s} \dot{\varphi} + (R^2 + s^2 + 2Rs \cos \alpha) \dot{\varphi}^2]$$

In fine

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M R^2 \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m [\dot{s}^2 - 2R \sin \alpha \dot{s} \dot{\varphi} + (R^2 + s^2 + 2Rs \cos \alpha) \dot{\varphi}^2]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} M R^2 + m (R^2 + s^2 + 2Rs \cos \alpha) \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 - 2R \sin \alpha \dot{s} \dot{\varphi})$$

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \dot{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} M R^2 + m (R^2 + s^2 + 2Rs \cos \alpha) & -m R \sin \alpha \\ -m R \sin \alpha & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{bmatrix}$$

$$EL_{\varphi}: \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left[\frac{3}{2} M R^2 + m (R^2 + s^2 + 2 R s \cos \alpha) \right] \dot{\varphi} - m R s \sin \alpha \dot{s} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left[\frac{3}{2} M R^2 + m (R^2 + s^2 + 2 R s \cos \alpha) \right] \ddot{\varphi} + 2 m (s \dot{s} + R \cos \alpha \dot{s}) \dot{\varphi} - m R s \sin \alpha \ddot{s}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0, \quad Q_{\varphi} = -b \varphi$$

$$\left[\frac{3}{2} M R^2 + m (R^2 + s^2 + 2 R s \cos \alpha) \right] \ddot{\varphi} + 2 m (s \dot{s} + R \cos \alpha \dot{s}) \dot{\varphi} - m R s \sin \alpha \ddot{s} = -b \varphi$$

$$EL_s: \frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} - m R s \sin \alpha \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} \right) = m (\ddot{s} - R \sin \alpha \ddot{\varphi})$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = m (1 + R \cos \alpha) \dot{\varphi}^2, \quad Q_s = -c (s + R \cos \alpha)$$

$$m (\ddot{s} - R \sin \alpha \ddot{\varphi}) - m R \cos \alpha \dot{\varphi}^2 = -c (s + R \cos \alpha)$$

Quindi

$$EL: \begin{cases} \left[\frac{3}{2} M R^2 + m (R^2 + s^2 + 2 R s \cos \alpha) \right] \ddot{\varphi} + 2 m (s \dot{s} + R \cos \alpha \dot{s}) \dot{\varphi} - m R s \sin \alpha \ddot{s} = -b \varphi \\ m [\ddot{s} - R \sin \alpha \ddot{\varphi} - (s + R \cos \alpha) \dot{\varphi}^2] = -c (s + R \cos \alpha) \end{cases}$$

5) Poiché la collezione è conservativa, le EL linearizzate in torno agli equilibri sono

$$(8.1) \quad A(q_e) \ddot{x} + H_v x = 0 \quad x = \frac{q(t) - q_e}{\varepsilon}$$

Quindi

$$A(q_e) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} M R^2 + m R^2 \sin^2 \alpha & -m R \sin \alpha \\ -m R \sin \alpha & m \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} M + m \sin^2 \alpha \right) R^2 & -m R \sin \alpha \\ -m R \sin \alpha & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(8.2) \quad \begin{cases} \left(\frac{3}{2} M + m \sin^2 \alpha \right) R^2 \ddot{x}_1 - m R \sin \alpha \ddot{x}_2 + b x_1 = 0 \\ -m R \sin \alpha \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2 + c x_2 = 0 \end{cases}$$

N.B. le EL linearizzate sono accoppiate, quindi, per risolverle, bisogna applicare la teoria dei modi normali.

6) Dal fatto che la matrice H_v , in questo caso, ⁽⁹⁾
è definita positiva, segue che i suoi autovalori
rispetto alla matrice A , cioè le soluzioni di

$$\det (H_v - \lambda A) = 0,$$

sono positivi. Quindi le soluzioni delle equazioni
(8.2) sono periodiche e oscillatorie. Il moto
complessivo è periodico se e solo se il rapporto
fra i 2 periodi è razionale

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}.$$