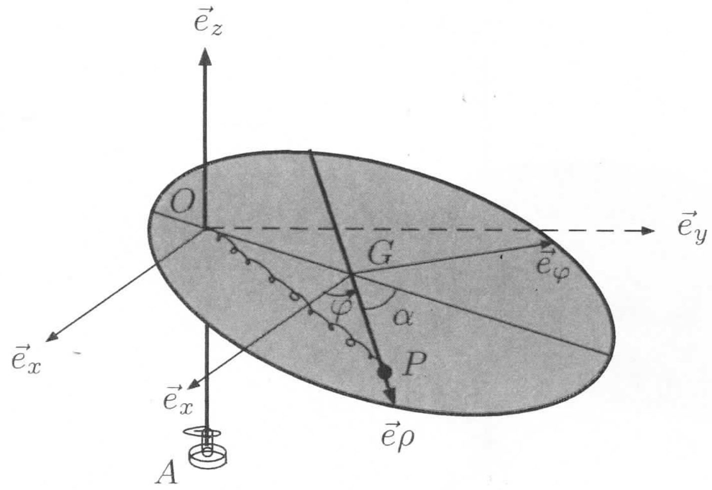
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 4 Luglio 2023. (G. Tondo)



Un rigido è costituito da un disco di massa M e da un asse r (di massa trascurabile) ad esso ortogonale, passante per un punto O che si trova a distanza $0 < d < R$ dal centro G. Esso è vincolato mediante una cerniera cilindrica nel punto fisso A ad avere l'asse r verticale. Inoltre, sul disco è appoggiato un punto materiale P di massa m, vincolato a scorrere senza attrito su una guida solidale al disco e inclinata di un angolo α rispetto al diametro per O e G. Sul disco agisce una molla angolare di richiamo con asse verticale e costante elastica b, posta in A; sul punto P una molla di costante elastica c e fissata in O. Inoltre, su tutto il modello, agisce il peso proprio. Si denoti con $\varphi \in \mathbb{R}$ l'angolo compreso tra la posizione di riposo della molla, individuata dal versore $\vec{e}_x$ e il versore $\vec{e}_\rho$ e con $-R \leq s \leq R$ la coordinata di P lungo la guida rispetto al punto G.

STATICA.

1) Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

2) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, della cerniera cilindrica in A sul rigido;

3) calcolare le reazioni vincolari, all'equilibrio, del disco sul punto P.

DINAMICA.

Si chiede di:

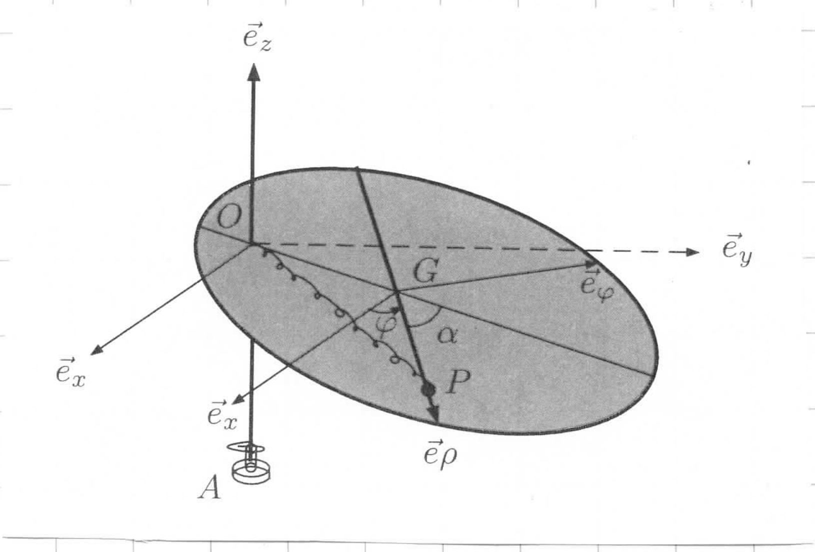
4) scrivere le equazioni pure di moto;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;

6) calcolare le reazioni vincolari, durante il moto, del disco sul punto P.

Tema del 4/07/2023

Il modello è costituito da un rigido $\mathcal{R}$ (disco + asse) con asse fisso e da un punto materiale vincolato al disco. Con il metodo dei congelamenti successivi si può concludere che i gradi di libertà sono 2. Un sistema di coordinate libere sono $q:(\varphi, s)$ con $\varphi \in \mathbb{R}$, $-R \leq s \leq R$ (vedi figura).



Utilizzeremo 2 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ base fissa a terra

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ base solidale al disco

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$P-O = (P-G)+(G-O) = s\,\vec{e}_s + d(\cos\alpha\,\vec{e}_s + \sin\alpha\,\vec{e}_\varphi)$$
$$= (s+d\cos\alpha)\,\vec{e}_s + d\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi$$

$$|P-O|^2 = (s+d\cos\alpha)^2 + d^2\sin^2\alpha = (s^2+2sd\cos\alpha + d^2\underline{\cos^2\alpha}) + d^2\underline{\sin^2\alpha}$$
$$= s^2 + 2sd\cos\alpha + d^2$$

1) Equilibri

La sollecitazione attiva sia esterna (peso + molle angolare) sia interna (molla) è conservativa. Quindi possiamo calcolare l'energia potenziale (sempre definita a meno di una costante additiva).

$$V(\varphi, s) = \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2}c|\overline{PO}|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2}c(s^2+2sd\cos\alpha + d^2)$$
$$\simeq \frac{1}{2} b\varphi^2 + \frac{1}{2}c(s^2+2sd\cos\alpha)$$

Cerchiamo i punti stazionari di V.

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = b\varphi = -Q_\varphi \qquad \begin{cases} b\varphi = 0 \\ s+d\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = c(s+d\cos\alpha) = -Q_s$$

Dunque, $\exists!\ q_e = (\varphi_e, s_e) = (0, -d\cos\alpha) \qquad s_e \in]-d, 0[$

Per determinarne la stabilità, classifichiamo il punto stazionario.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = b \, , \; \frac{\partial^2 V}{\partial s \, \partial \varphi} = 0 \, , \; \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = c$$

Quindi la matrice Hessiana è

$$\mathcal{H}_V = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad \det \mathcal{H}_V = bc > 0 \qquad \mathcal{H}_{11} = b > 0 \Rightarrow \text{q}^e \text{ minimo} \Downarrow \text{stabilità}$$

2) La sollecitazione reattiva esercitata da una cerniera cilindrica fissa e liscia è

$$\mathcal{L}^{(reatt)} = \{(A, \vec{\phi}), \vec{\mu}\} \qquad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Scriviamo le ECS

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est, att)} + \vec{\phi}_A = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est, att)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{\phi}_A = -\vec{R}^{(est, att)} \\ \vec{\mu} = -\vec{M}_A^{(est, att)} \end{cases}$$

$$\vec{R}^{(est, att)} = (M + m)\vec{g} \Rightarrow \vec{\phi}_A = (M + m) g \, \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_A^{(est, att)} = (G - A) \times M\vec{g} + (P - A) \times m\vec{g} = [(G - O) + (O - A)] \times M\vec{g} + [(P - O) + (O - A)] \times m\vec{g}$$

$$= (G - O) \times M\vec{g} + [(P - G) + (G - O)] \times m\vec{g} = (G - O) \times (M + m)\vec{g} + (P - G) \times m\vec{g}$$

Dunque,

$$\vec{M}_A^{(est,att)} = d(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{e}_\varphi)\times(M+m)(-g\vec{e}_z) + [s\,\vec{e}_\rho \times m(-g)\vec{e}_z],$$

$$= -(M+m)g\left[d\cos\alpha\,(-\vec{e}_\varphi) + d\sin\alpha\,\vec{e}_\rho\right] - mgs\,(-\vec{e}_\varphi)$$

$$= \left[(M+m)g\,d\cos\alpha + mgs\right]\vec{e}_\varphi - (M+m)g\,d\sin\alpha\,\vec{e}_\rho$$

Quindi

$$\vec{M}_A^{(est,att)}\Big|_{q_e} = \left[Mg\,d\cos\alpha + mg\,\cancel{d\cos\alpha} - mg\,\cancel{d}\cos\alpha\right]\vec{e}_\varphi - (M+m)g\,d\sin\alpha\,\vec{e}_\rho$$

Dunque

$$\vec{\mu} = (M+m)g\,d\sin\alpha\,\vec{e}_\rho - Mg\,d\cos\alpha\,\vec{e}_\varphi$$

3) Reazione in P all'equilibrio

$$\vec{F}_P^{(att)} + \vec{\Psi}_P = \vec{O} \iff \vec{\Psi}_P = -\vec{F}_P^{(att)}$$

$$\vec{F}_P^{(att)} = m\vec{g} - c(P-O) = -mg\,\vec{e}_z - c\left[(s+d\cos\alpha)\vec{e}_\rho + d\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi\right]$$

$$\vec{F}_P^{(att)}\Big|_{q_e} = -mg\,\vec{e}_z - c\,d\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{\Psi}_P = mg\,\vec{e}_z + c\,d\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi$$

4) Eq. pure di moto

Scriviamo le EL. A tale scopo, calcoliamo ...

$$K = K^{(R)} + K^{(P)}$$

$$K^{(R)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_0(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot \mathbb{I}_0(\vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_0(\vec{e}_z) = \vec{e}_z\cdot \mathbb{I}_G(\vec{e}_z) + \vec{e}_z\cdot M\,(G-0)\times(\vec{e}_z\times(G-0))$$

Quindi

$$I_{0z} = I_{Gz} + M\,d^2 \qquad \text{(Teo di Huygens-Steiner)}$$

$$I_{0z} = \frac{1}{2} M R^2 + M d^2 = M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)$$

Dunque,

$$K^{(R)} = \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\, m\, |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P^{(an)} = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

$\vec{v}_P^{(rel)}$: rs. alla terna $(G;\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$

$\vec{v}_P^{(an)}$: rs. alla terna $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$

$$\vec{v}_P^{(rel)} = \dot{s}\,\vec{e}_\rho$$

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \vec{v}_G + \vec{\omega}\times(P-G) = \cancel{\vec{v}_0} + \vec{\omega}\times(G-0) + \vec{\omega}\times(P-G) = \vec{\omega}\times(P-0) =$$

$$= \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times\left[(s + d\cos\alpha)\,\vec{e}_\rho + d\sin\alpha\,\vec{e}_\varphi\right] = \dot{\varphi}\left[(s+d\cos\alpha)\,\vec{e}_\varphi - d\sin\alpha\,\vec{e}_\rho\right]$$

Quindi

$$\vec{v}_P^{(an)} = \left(\mathring{s} - d \sin\alpha\, \mathring{\varphi}\right) \vec{e}_j + \left(s + d\cos\alpha\right) \mathring{\varphi}\, \vec{e}_4$$

$$|\vec{v}_P|^2 = \left(\mathring{s} - d \sin\alpha\, \mathring{\varphi}\right)^2 + \left(s + d\cos\alpha\right)^2 \mathring{\varphi}^2 =$$

$$= \mathring{s}^2 - 2d\sin\alpha\, \mathring{s}\mathring{\varphi} + d^2 \sin^2\alpha\, \mathring{\varphi}^2 + \left(s^2 + 2ds\cos\alpha + d^2\cos^2\alpha\right)\mathring{\varphi}^2$$

$$= \mathring{s}^2 - 2d\sin\alpha\, \mathring{s}\mathring{\varphi} + \left(d^2 + s^2 + 2ds\cos\alpha\right)\mathring{\varphi}^2$$

Dunque

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m \left[\mathring{s}^2 - 2d\sin\alpha\, \mathring{s}\mathring{\varphi} + \left(d^2 + s^2 + 2d\cos\alpha\, s\right)\mathring{\varphi}^2\right]$$

Infine

$$K = \frac{1}{2} M \left(\frac{R^2}{2} + d^2\right)\mathring{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left[\mathring{s}^2 - 2d\sin\alpha\, \mathring{s}\mathring{\varphi} + \left(d^2 + s^2 + 2d\cos\alpha\, s\right)\mathring{\varphi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right) + m\left(d^2 + s^2 + 2d\cos\alpha\, s\right)\right]\mathring{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \left(\mathring{s}^2 - 2d\sin\alpha\, \mathring{s}\mathring{\varphi}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\left[\mathring{\varphi}, \mathring{s}\right] \begin{bmatrix} M\left(\frac{R^2}{2} + d^2\right) + m\left(d^2 + s^2 + 2d\cos\alpha\, s\right) & -md\sin\alpha \\ -md\sin\alpha & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\varphi} \\ \mathring{s} \end{bmatrix}$$

EL_φ: $$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = \left[M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\left(d^2+s^2+2d\cos\alpha\, s\right)\right]\dot\varphi - m d \sin\alpha\, \dot s$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = \left[M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\left(d^2+s^2+2d\cos\alpha\, s\right)\right]\ddot\varphi + 2m\left(s\,\dot s + d\cos\alpha\ \dot s\right)\dot\varphi - m d\sin\alpha\, \ddot s$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0 \,, \quad Q_\varphi = -b\varphi$$

$$\left[M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\left(d^2+s^2+2d\cos\alpha\, s\right)\right]\ddot\varphi + 2m\left(s+d\cos\alpha\right)\dot s\dot\varphi - m d\sin\alpha\,\ddot s = -b\varphi$$

EL_s: $$\frac{\partial K}{\partial \dot s} = m\dot s - m d\sin\alpha\,\dot\varphi \,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot s}\right) = m\left(\ddot s - d\sin\alpha\,\ddot\varphi\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = m\left(s + d\cos\alpha\right)\dot\varphi^2 \,, \quad Q_s$$

$$m\left(\ddot s - d\sin\alpha\,\ddot\varphi\right) - m d\cos\alpha\,\dot\varphi^2 = -c\left(s+d\cos\alpha\right)$$

Quindi

$$EL: \begin{cases} \left[M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\left(d^2+s^2+2d\cos\alpha\, s\right)\right]\ddot\varphi + 2m\left(s+d\cos\alpha\right)\dot s\dot\varphi - m d\sin\alpha\,\ddot s = -b\varphi \\ m\left[\ddot s - d\sin\alpha\,\ddot\varphi - \left(s+d\cos\alpha\right)\dot\varphi^2\right] = -c\left(s+d\cos\alpha\right) \end{cases}$$

5) Poiché la sollecitazione è conservativa, le EL linearizzate intorno agli equilibri sono

$$A(q_e)\,\underline{\ddot{x}} + \mathcal{H}_V\,\underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{x} = \frac{q(t) - q_e}{\varepsilon}$$

Quindi

$$A(q_e) = \left[\begin{array}{c|c} M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\,d^2 \sin^2\alpha & -m\,d \sin\alpha \\ -m\,d\sin\alpha & m \end{array}\right]$$

Dunque

$$\left[\begin{array}{c|c} M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\,d^2\sin^2\alpha & -m\,d\sin\alpha \\ \hline -m\,d\sin\alpha & m \end{array}\right]\begin{bmatrix}\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & c\end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \left[M\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) + m\,d^2\sin^2\alpha\right]\ddot{x}_1 - m\,d\sin\alpha\,\ddot{x}_2 + b\,x_1 = 0 \\ -m\,d\sin\alpha\,\ddot{x}_1 + m\,\ddot{x}_2 + c\,x_2 = 0 \end{cases}$$

N.B. le EL linearizzate sono accoppiate, quindi, per risolverle, bisogna applicare la teoria dei modi normali.

6) Reazioni in P durante il moto

Scriviamo l'eq. di Newton

$$\vec F_P^{(att)} + \vec\varphi'_P = m\,\vec a_P \Leftrightarrow \vec\varphi'_P = -\vec F_P^{(att)} + m\,\vec a_P$$

$$\vec F_P^{(att)} = m\vec g - c\,(P-O) = -mg\,\vec e_z - c\left[(s+d\cos\alpha)\,\vec e_\rho + d\sin\alpha\,\vec e_\varphi\right]$$

$$\vec a_P^{(ass)} = \vec a_P^{(rel)} + \vec a_P^{(tr)} + \vec a_P^{(cor)}$$

$$\vec a_P^{(rel)} = \ddot s\,\vec e_\rho\ ,\quad \vec a_P^{(tr)} = \vec a_G + \dot{\vec\omega}\times(P-G) + \vec\omega\times(\vec\omega\times(P-G)) =$$

$$= \cancel{\vec a_O} + \dot{\vec\omega}\times(G-O) + \vec\omega\times(\vec\omega\times(G-O)) + \dot{\vec\omega}\times(P-G) + \vec\omega\times(\vec\omega\times(P-G)) =$$

$$= \dot{\vec\omega}\times(P-O) + \vec\omega\times(\vec\omega\times(P-O)) =$$

$$= \ddot\varphi\,\vec e_z\times\left[(s+d\cos\alpha)\,\vec e_\rho + d\sin\alpha\,\vec e_\varphi\right] + \dot\varphi^2\,\vec e_z\times(\vec e_z\times(P-O))$$

$$= \ddot\varphi\left[(s+d\cos\alpha)\,\vec e_\varphi - d\sin\alpha\,\vec e_\rho\right] - \dot\varphi^2\left[(s+d\cos\alpha)\,\vec e_\rho + d\sin\alpha\,\vec e_\varphi\right]$$

$$= \left[\ddot\varphi\,(s+d\cos\alpha) - d\sin\alpha\,\dot\varphi^2\right]\vec e_\varphi - \left[\ddot\varphi\,d\sin\alpha + \dot\varphi^2(s+d\cos\alpha)\right]\vec e_\rho =$$

$$\vec a_P^{(cor)} = 2\,\vec\omega\times\vec v_P^{(rel)} = 2\,\dot\varphi\,\vec e_z\times\dot s\,\vec e_\rho = 2\,\dot\varphi\,\dot s\,\vec e_\varphi$$

Quindi

$$\vec a_P^{(ass)} = \left[\ddot s - \ddot\varphi\,d\sin\alpha - \dot\varphi^2(s+d\cos\alpha)\right]\vec e_\rho + \left[\ddot\varphi\,(s+d\cos\alpha) - d\sin\alpha\,\dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot s\right]\vec e_\varphi$$

Donc que

$$\vec{\Psi}_P' \cdot \vec{e}_\rho = + c(s+d\cos\alpha) + m\left[\ddot{s} - \ddot{\varphi}\, d \sin\alpha - \dot{\varphi}^2 (s+d\cos\alpha)\right] \overset{(El_s)}{=} 0$$

$$\vec{\Psi}_P' \cdot \vec{e}_\varphi = c\, d \sin\alpha + m\left[\ddot{\varphi}(s+d\cos\alpha) - d \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{s}\right]$$

$$\vec{\Psi}_P' \cdot \vec{e}_z = mg$$

Dunque,

$$\vec{\Psi}_P' = mg\,\vec{e}_z + \left[c\, d \sin\alpha + m\left[\ddot{\varphi}(s+d\cos\alpha) - d \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{s}\right]\right]\vec{e}_\varphi$$