Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 14.06.23

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2022/2023

Esercizio 1

1. Scrivere la definizione di trasformazione canonica, scrivendo la relazione tra le Hamiltoniane coniugate. [2pt]

2. Dimostrare che l'identità è una trasformazione canonica. [1pt]

3. Definire cosa si intende per trasformazioni simplettiche e dimostrare che le trasformazioni simplettiche sono *trasformazioni canoniche univalenti.* [4 pt]

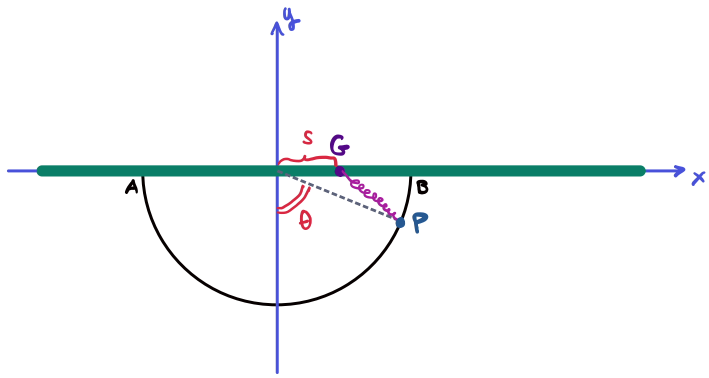
4. Definire cosa si intende per flusso Hamiltoniano e dire la sua relazione con le trasformazioni canoniche. [1pt]

5. Si consideri la seguente trasformazione di coordinate sullo spazio delle fasi di un sistema con $n = 1$ gradi di libertà:
$$p = \tilde{p}^{\alpha}\, e^{-\beta \tilde{q}}\,, \qquad q = \tilde{p}^{1/3}\, e^{\gamma \tilde{q}}$$
Trovare i valori di α, β, γ tali che la trasformazione data sia canonica univalente. [2pt]

6. Si consideri l'Hamiltoniana $H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 q^2$. **Usando la trasformazione canonica del punto 5**, trovare le soluzioni $(p(t), q(t))$ delle equazioni del moto relative ad H. [2pt]

7. *Facoltativo: Sia $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il flusso Hamiltoniano relativo a $H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 q^2$. Scrivere esplicitamente la mappa $\Phi_t(p, q)$. Scrivere la corrispondente trasformazione infinitesima, dimostrando che è generata proprio da $H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 q^2$. [1pt]*

Esercizio 2



Nel sistema in figura, disposto in un piano verticale, una sbarra omogenea rigida di massa M e lunghezza ℓ è appoggiata senza attrito sugli estremi A e B di una guida semicircolare fissa di raggio R, con $\ell > 4R$ (ed è quindi libera di scorrere lungo l'asse x). Un punto materiale P di massa m è vincolato a giacera su tale guida. **Sul sistema agisce la gravità**. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il punto materiale P con il centro di massa G della barra.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'angolo θ in figura e l'ascissa s del centro di massa G. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].

2. Trovare le equazioni di Lagrange associate [1pt].

3. Che simmetria ha il sistema (oltre all'invarianza per traslazioni temporali)? Ci sono costanti del moto associate ad essa? [0,5]

4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [3pt].

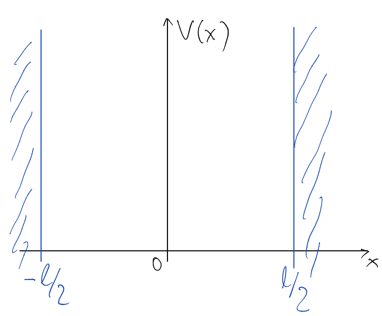
5. **Si ponga** $M = m$ **e** $kR > 10\,mg$. Calcolare le frequenza delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili. Scrivere la Lagrangiana linearizzata e le corrispondenti equazioni del moto linearizzate [2,5pt].

6. **Si ponga** $k = \frac{mg}{R}$. Si aggiunga al sistema una forza esterna costante $\vec{F} = F\,\vec{e}_x$ agente sulla sbarra. Si determini: a) come la sua presenza modifica la Lagrangiana trovata a punto 1; b) il valore di F affinchè ci sia un punto di equilibrio stabile a $s = R$ [2pt].

7. *Facoltativo: Determinare il cambiamento di coordinate che porta la Lagrangiana linearizzata trovata al punto 5 ad una Lagrangiana di due oscillatori armonici disaccoppiati [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, indicando le opportune condizioni di raccordo [2pt].

2. Si trovino gli autovalori dell'Hamiltoniana [2pt].

3. Si calcoli il valor medio dell'energia nel secondo livello energetico [1pt].

4. Si calcoli il valor medio dell'impulso P nel terzo livello energetico [1pt].

5. Si consideri il sistema nello stato fondamentale: calcolare la probabilità che la particella venga misurata nell'intervallo $[0, \frac{\ell}{4}]$ [1pt].