

Laurea in Matematica
Università degli Studi di Trieste
Corso di Istituzioni di Algebra e Geometria
Appello d'esame del 19 giugno 2023

Si risolvano i seguenti esercizi, motivando adeguatamente le risposte.

1. (10 punti)

- (a) (4 punti) Nello spazio affine \mathbb{C}^2 con coordinate (x, y) si determinino i punti di intersezione delle seguenti curve:

$$\mathcal{C}_1 = V(x + y), \quad \mathcal{C}_2 = V(x^2 - 2y) \subset \mathbb{C}^2.$$

- (b) (6 punti) Si dica se l'ideale $(x + y, x^2 - 2yz)$ di $\mathbb{C}[x, y]$ è principale.

2. (10 punti) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con coordinate omogenee $[x : y : z]$ si dica se la seguente curva

$$V((x^2 + y^2)^2 + 3x^2yz - y^3z)$$

è razionale, e nel caso affermativo se ne determini una sua parametrizzazione razionale. (Suggerimento: si determini l'ordine del punto $[0 : 0 : 1]$ in \mathcal{C} .)

3. (10 punti) Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con coordinate omogenee $[x : y : z]$ si consideri la seguente cubica:

$$\mathcal{C} = V(y^2z - x^3 - x^2z + 2xz^2).$$

- (a) (8 punti) Si provi che \mathcal{C} non è singolare e si determini il suo modulo.

- (b) (2 punti) Si dica se \mathcal{C} è proiettivamente equivalente a $\mathcal{C}' := V(y^2z - x(x - z)(x + z))$.