SCRITTO IAG 19/6/2023
SOLUZIONE

1. (a) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = V(x+y) \cap V(x^2-2y)$

$= \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = -x \ , \ x^2+2x=0\} =$

$= \{(0,0), (-2,2)\}$

(b) Se $(x+y, x^2-2y)$ fosse principale,

$\exists\, f \in \mathbb{C}[x,y]$ t.c. $(x+y, x^2-2y) = (f)$

per definizione. $\Rightarrow V(f) \subseteq V(x+y) \cap V(x^2-2y)$

Oss. $\deg(f) > 0 \Rightarrow |V(f)| = \infty$ ↯

$\Rightarrow$ l'ideale non è principale.

2. $\mathcal{C} = V\Big(\underbrace{(x^2+y^2)^2 + 3x^2yz - y^3z}_{F}\Big)$

Oss. $F \in (\mathbb{C}[x,y])[z]$ ha grado 1 ed è irriducibile $\Rightarrow \mathcal{C}$ è irriducibile e di grado 4.

Oss. $[0:0:1] \in \mathcal{C}$ è di ordine 3 $\Rightarrow \mathcal{C}$ è razionale.

Poniamo $f(x,y) := F(x,y,1) = \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{f_{(4)}} + \underbrace{3x^2y - y^3}_{f_{(3)}}$

$$\Rightarrow \varphi([t_0:t_1]) = \left[f_{(n)}(t_0,t_1) : -f_{(n-1)}(t_0,t_1)\cdot t_0 : -f_{(n-1)}(t_0,t_1)\cdot t_1 \right]$$

$$= \left[(t_0^2+t_1^2)^2 : -(3t_0^2t_1 - t_1^3)\cdot t_0 : -(3t_0^2t_1-t_1^3)\cdot t_1 \right].$$

è una parametrizzazione razionale.

3. a) $F = y^2 z - x^3 - x^2 z + 2 x z^2$

$\nabla F = \left(-3x^2 - 2xz + 2z^2,\ 2yz,\ y^2 - x^2 + 4xz\right) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \Rightarrow z = 0 \\ \searrow x = 4z \Rightarrow -3 \cdot 16 z^2 - 8z^2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \end{array} \\ \text{o} \\ z = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\nabla F = 0$ se e solo se $x = y = z = 0$

Quindi $\operatorname{Sing} \mathcal{C} = \emptyset$.

Per trovare $j(\mathcal{C})$ scriviamo F in forma di Legendre: $y^2 z - x^3 - x^2 z + 2xz^2 =$

$$= y^2 z - x\left(x^2 + xz - 2z^2\right) = y^2 z - x(x-z)(x+2z)$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow j(\mathcal{C}) = \frac{(4+2+1)^3}{4 \cdot 9} = \frac{7^3}{36}$$

Per $\mathcal{C}'$, $\lambda = -1 \Rightarrow j(\mathcal{C}') = \frac{(1-1+1)^3}{4} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow j(\mathcal{C}) \neq j(\mathcal{C}') \Rightarrow \mathcal{C} \not\cong \mathcal{C}'$$