

SCRITTO GEU 19/6/2023

SOLUZIONE

Domande a risposta multipla.

1. b) S è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$
perché è l'insieme delle soluzioni
di un SL non omogeneo compatibile.

2. c) Perché, essendo il campo $\mathbb{C}$,
la somma delle molteplicità algebriche
degli autovalori di A è n
(teorema fondamentale dell'algebra).

Quindi basta solo verificare la condizione seguente: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda), \forall \lambda \in Sp(A)$

3. a) $\det \begin{pmatrix} -1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} = 1 - k^2 = (1-k)(1+k)$
 $\neq 0 \Leftrightarrow k \neq \pm 1 \Leftrightarrow \Pi, \Pi' \text{ incidenti.}$

ti.

4. e) $(A|e) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & a & 1 \\ 0 & 2a & 5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$

$$\underline{\text{II}} - 2\underline{\text{I}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2 & a+4 & | & -1 \\ 0 & 2a & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{\text{III}} + a\underline{\text{II}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2 & a+4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 5+4a+a^2 & | & -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & \text{se } a^2 + 4a + 5 \neq 0 \\ 2, & \text{se } a^2 + 4a + 5 = 0 \end{cases}$$

$$a^2 + 4a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i$$

$$\text{rg}(A|b) = 3, \quad \forall a$$

$$\Rightarrow \text{il SL } \bar{e} \text{ } \text{è compatibile} \Leftrightarrow a \neq -2 \pm i$$

5. c) Per i risultati visti a lezione.

6. c)

$$M_e^e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. a)

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 \cdot 7 = 17$$

8. e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof}(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizi.

1. (a) Sia $\mathcal{L}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

$$M_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si come $M_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}}(f)$ è simmetrica e $\mathcal{L}$ è
ortonormale per il prodotto scalare standard,

f è diagonalizzabile per il teorema
spettrale.

(e) Sì, per il teorema spettrale.

$$P_f(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} =$$
$$= (1-t)[t^2 - t - 1] - (1-t) = (1-t)(t^2 - t - 2)$$

$$= (1-t)(t+1)(t-2) \Rightarrow \text{Sp}(f) = \{1, -1, 2\}$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base cercata è $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

c) $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$2. \quad a) \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siccome $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono

l.i., $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è

una base di V .

b) La giacitura di una tale retta deve essere perpendicolare a V , cioè $V^\perp$.
Osserviamo che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in V^\perp$

$$\Rightarrow V^\perp = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\Rightarrow$ la retta cercata ha eq. parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Sia $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\Rightarrow g$ è sim-
metrica.

$$\begin{aligned} g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 = \\ &= x^2 + (x+y)^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ed $\bar{e} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

$\Rightarrow g$ è definita positiva.

(c) Per trovare tale base applichiamo Gram-Schmidt alla base canonica.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{g(e_1, e_1)}} \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2 &= e_2 - g(e_2, v_1) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{v}_2\| = \sqrt{g\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} - 1 + 2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\{v_1, v_2\}$ è base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, g)$.