

Nome Cognome

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

IV appello d'esame – A. A. 2022-2023

19/6/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ A 3 B 0 C -8 D 9

2) La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

è ortogonale A Vero B Falso

3) Le colonne di $A \in M_n(\mathbb{R})$, con $n \geq 2$, formano una base di \mathbb{R}^n se e solo se

A $\text{rg } A \neq 0$ B $\det A = 0$ C $\det A \neq 0$ D $\text{rg } A < n$.

4) Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A Vero B Falso

5) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineare con $\dim \ker f = 1$. Allora

A f è biiettiva C f è suriettiva

B f è iniettiva D f non è né iniettiva né suriettiva

6) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $\text{rg } f =$
 A 0 B 1 C 2 D 3 E I dati non sono sufficienti

7) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$ è
 A un piano affine non vettoriale di \mathbb{R}^3
 B un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3
 C una retta
 D l'insieme vuoto.

8) Consideriamo \mathbb{R}^5 col prodotto scalare canonico, e sia $W \subset \mathbb{R}^5$ un sottospazio vettoriale di dimensione due. Allora $\dim W^\perp =$
 A 1 B 2 C 3 D 4

Esercizi

1) (12 punti) Sia $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo definito ponendo

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) (3 punti) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di \mathbb{C}^3 .
 - (b) (4 punti) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
 - (c) (3 punti) f è diagonalizzabile?
 - (d) (2 punti) Esiste un endomorfismo $g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tale che $g \circ f$ sia invertibile?
- 2) (7 punti) Risolvere il seguente sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando anche la struttura dello spazio delle soluzioni

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ x + 2y - z = k - 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3) (7 punti) Si consideri in \mathbb{R}^3 , munito del prodotto scalare canonico, la retta r di equazione

$$r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

- (a) (5 punti) Determinare un'equazione cartesiana del piano H passante per il punto $Q = (1, 1, 1)$ e ortogonale ad r .
- (b) (2 punti) Calcolare la distanza tra il punto $A = (1, 0, 0)$ e H .