Esame di Analisi matematica II
Prova di esercizi
Corso dei prof. Scipio Cuccagna e Franco Obersnel
Sessione estiva, II appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di Corso** ______________

ESERCIZIO N. 1.

Trovare punti di massimo e di minimo assoluto e relativo di

$$f(x,y) \; \cancel{f(x)} = \frac{x}{1+x^4+y^4}$$

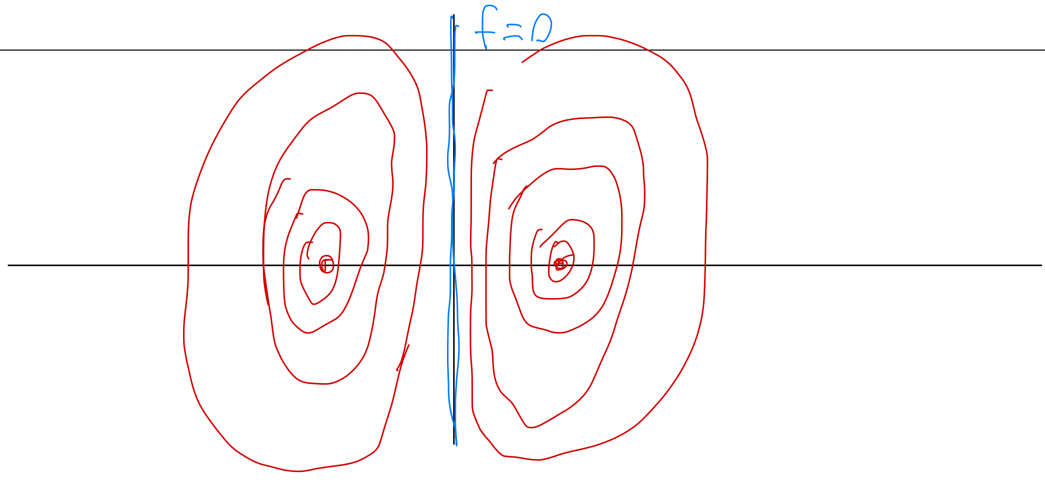
Inoltre disegnare le curve di livello.

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{1+x^4+y^4} - \dfrac{4x^4}{(1+x^4+y^4)^2} = \dfrac{1-3x^4+y^4}{(1+x^4+y^4)^2} = 0 \\[2ex] f_y = \dfrac{-4y^3x}{(1+x^4+y^4)^2} = 0 \end{cases}$$

, Segue $y = 0$ $\quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

Siccome $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0$, la funzione ha entrambi i segni, esistono punti di massimo e di minimo assoluto, che necessariamente sono punti critici. Necessariamente, da

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) > 0 > f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, ricavo $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ pt. di mass. assoluto e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ punto di minimo assoluto. Si noti $f = 0 \iff x = 0$



ESERCIZIO N. 2.

• (5 punti) Si trovino i punti critici di $f(x, y) = 2x^2 + y^4$ sul vincolo di equazione $g(x, y) := x^6 + y^6 = 1$.

$$\begin{cases} 4x = 6\lambda x^5 \\ 4y^3 = 6\lambda y^5 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

$(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ sono punti critici. Per $x \neq 0$ e $y \neq 0$ segue $\frac{2}{3\lambda} = x^4 = y^2$ così $y = \pm x^2$. Inserendo nella terza

$x^{12} + x^6 - 1 = 0$ $\quad x_\pm^6 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Necessariamente

$x^6 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\quad x^2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} =: y_0$ e

$x_0 =: \sqrt[6]{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$. In totale sono 8 punti critici

(in particolare denotato l'ultimo con $(\pm x_0, \pm y_0)$ 4 punti)

• (3 punti) Si stabilisca quali punti critici sono massimi assoluti o minimi assoluti.

$f(0, \pm 1) = 1$, $\quad f(\pm 1, 0) = 2$. Ora valutiamo

$f(\pm x_0, \pm y_0) = f(x_0, y_0) = 2 \frac{(\sqrt{5} - 1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$

Per prima cosa, $0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1$ e $\sqrt{5} > 2$, quindi

$f(x_0, y_0) > 2^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}} + \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4}$

$= 2^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \overset{?}{>} 2 \quad *$

$\iff 2^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} > \frac{5}{2} \iff 2^{\frac{5}{2}} + 1 > 5$

Quest'ultima è vera da $2^{\frac{5}{2}} + 1 > 2^2 + 1 = 5$

Pertanto $*$ è vera e risulta che

$(\pm x_0, \pm y_0)$ sono punti di max assoluto

e $(0, \pm 1)$ punti di min assoluto