Nome .... **Cognome** ....

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

V appello d'esame – A. A. 2022-2023

3/7/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Supponiamo che 0 sia autovalore di $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$. Allora

   A $\mathrm{rg}\, f < n$

   B $\mathrm{rg}\, f = n$

   C f è diagonalizzabile

   D Nessuna delle precedenti

2) Il minimo numero di equazioni lineari per descrivere un piano affine in $\mathbb{R}^3$ è

   A 0 B 1 C 2 D 3 E non esiste

3) Le colonne di $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se

   A $\mathrm{rg}\, A > 0$ B $\mathrm{rg}\, A = 1$ C $\mathrm{rg}\, A = 2$ D $\mathrm{rg}\, A = 3$

4) Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se e soltanto se:

   A $M = {}^tM$ B $MM = I_n$ C ${}^tMM = I_n$ D $\det M = \pm 1$

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare con $\dim \ker f = 1$. Allora f

   A è biiettiva C è suriettiva

   B è iniettiva D non è né iniettiva né suriettiva

6) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Allora f

$\boxed{\text{A}}$ non può essere iniettiva

$\boxed{\text{B}}$ non può essere suriettiva

$\boxed{\text{C}}$ è suriettiva

$\boxed{\text{D}}$ è iniettiva

$\boxed{\text{E}}$ nessuna della precedenti

7) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{2}\,x - 3y = -1\}$ è

$\boxed{\text{A}}$ un piano affine non vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{B}}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{C}}$ una retta

$\boxed{\text{D}}$ l'insieme vuoto.

8) Il seguente sistema lineare reale dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + y - az = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

è compatibile: $\boxed{\text{A}}$ soltanto per $a = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\forall a \neq 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

Esercizi

1) *(12 punti)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$$

dove $\mathbb{R}^2$ si considera munito del prodotto scalare canonico.

(a) *(2 punti)* Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) *(1 punti)* Calcolare $\det f$.

(c) *(1 punti)* f è autoaggiunta?

(d) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale diagonalizzante per f.

(e) *(3 punti)* Determinare una matrice $U \in \mathrm{O}(2)$, la sua inversa, e una matrice diagonale D tali che $A = U^{-1} D\, U$.

2) *(6 punti)* Risolvere il seguente sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando anche la struttura dello spazio delle soluzioni

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ x + 2y - kz = k \\ y + z = k \end{cases}$$

3) *(8 punti)* Si consideri in $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, il piano H di equazione

$$H : x + y - z = 1$$

(a) *(5 punti)* Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e ortogonale ad H.

(b) *(3 punti)* Determinare una base ortonormale per la giacitura di H.