Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 11.07.23

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2022/2023

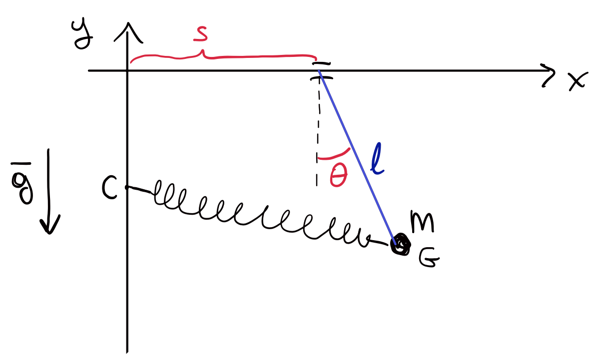
Esercizio 1

1. Definire le Parentesi di Poisson e dimostrare la proprietà $\{f, g_1 g_2\} = g_1\{f, g_2\} + \{f, g_1\} g_2$ [1pt].
2. Scrivere la definizione di trasformazione canonica. [1 pt]
3. Definire cosa si intende per trasformazioni che preservano le parentesi di Poisson. Dimostrare che tali trasformazioni sono simplettiche. [3 pt]
4. Che legame c'è tra trasformazioni simplettiche e trasformazioni canoniche? [0,5 pt]
5. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther in meccanica Hamiltoniana [3pt].
6. Si consideri un sistema a 1 grado di libertà ($n = 1$). Data una generica funzione sullo spazio delle fasi $G(p, q)$, dimostrare che la seguente trasformazione infinitesima è una trasformazione canonica *infinitesima* [1,5pt]:

$$\tilde{p} = p - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q}(p, q) \qquad \tilde{q} = q + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p}(p, q) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon \ll 1$$

7. Si scriva una generica rotazione di angolo α attorno all'asse z. Si derivi da essa la variazione del vettore $\vec{q}$ sotto una rotazione infinitesima attorno all'asse z. Si dimostri che essa è generata dalla componente $M_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$ del momento angolare. [2pt]
8. *Facoltativo: Determinare la funzione $G(p, q)$ che genera traslazioni infinitesime in q. Integrare la trasformazione infinitesima per ottenere la trasformazione finita [1pt].*

Esercizio 2



Nel sistema in figura, disposto in un piano verticale, un punto materiale G di massa m è attaccato all'estremo di un sbarra di massa trascurabile e lunghezza ℓ. L'altro estremo della sbarra è libero di muoversi sull'asse x con ascissa s. **Sul sistema agisce la gravità**. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il punto materiale G con il punto C di coordinate $(0, -\frac{\ell}{2})$.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'angolo θ e l'ascissa s in figura. [2pt].

2. Si scriva la matrice cinetica e si dimostri che è definita positiva. Se si trovano punti dello spazio delle configurazioni in cui questo non è vero, spiegarne il motivo. [1pt]

3. Si trovi l'equazione di Lagrange associata a s [1pt].

4. Ponendo a zero uno dei parametri, il numero di costanti del moto del sistema è almeno due. Dire quali sono (scrivere l'espressione esplicita della costanti del moto) e perché. [1,5pt]

5. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [3,5pt].

6. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili [2pt].

7. *Facoltativo: Porre $g = 0$: trovare le configurazioni di equilibrio stabili. Discutere i modi normali di oscillazione [1pt].*

Esercizio 3

Si cosideri una particella vincolata su una circonferenza di raggio R e parametrizzata da $\varphi \in [0, 2\pi[$. Classicamente la sua dinamica è descritta dalla Lagrangiana

$$L = \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{\hbar\theta}{2\pi}\dot{\varphi}\,.$$

1. Si scriva l'Hamiltoniana H_θ per un generico valore di θ [0,5pt].

2. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, trovando autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana $\hat{H}_\theta$ [4pt].

3. Si dica se le autofunzioni di $\hat{H}_\theta$ descrivono stati fisici del problema e perchè [0,5pt].

4. Dato lo stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos\varphi$ al tempo $t = 0$, scrivere il suo evoluto $\psi(\varphi, t)$ al tempo $t \neq 0$ [1pt].

5. Si fissi $\theta = 0$. Si calcoli il valor medio di P^2 nello stato fondamentale [1pt].