Nome .... Cognome (in stampatello) ....

Corso di GEOMETRIA - PROVA SCRITTA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste - A.A. 2022/2023

Trieste, 17 luglio 2023 Prof. Fabio Perroni

Il tempo a disposizione è 3 ore.

Affinché l'elaborato venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla.

Ciascuna risposta corretta alle domande a risposta multipla vale 0,5 punti, gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30). Per essere ammessi all'esame orale è necessario ottenere almeno 15 punti in totale. Le risposte degli esercizi vanno adeguatamente giustificate.

Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

Domande a risposta multipla (segnare con una croce la sola risposta corretta)

1. Qual è la rappresentazione trigonometrica del numero complesso $z = -9 - i3^{\frac{5}{2}}$?

(a) $18\,(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$;

(b) $18\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$;

(c) $-18\,(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

2. Quale delle seguenti matrici è a scala?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Siano $a \in K$ e $v \in V$ tali che $a \cdot v = 0$. Allora deve necessariamente essere

(a) $a = 0$ e $v = 0$; (b) $a = 0$ o $v = 0$; (c) $a = 0$.

4. L'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -x - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 6z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$.

(a) Vero; (b) falso; (c) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

5. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo tale che 0 sia un suo autovalore. Allora

(a) $\mathrm{rg}(f) < n$;

(b) $\mathrm{rg}(f) > n$;

(c) $\mathrm{rg}(f) = n$.

6. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, l'angolo convesso compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vale

(a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi}{3}$; (c) $\frac{\pi}{4}$.

7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le rette

$$\mathbf{r}: \begin{cases} 2y + z = & 0 \\ x - y + z = & -1\,, \end{cases} \quad \text{ed} \quad \mathbf{s}: \begin{cases} x + y + 2z = & 1 \\ x - z = & 0 \end{cases}$$

sono

(a) parallele; (b) incidenti; (c) sghembe.

8. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, siano $\mathbf{r}$ una retta e P un punto. Quanti sono i piani di $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ che passano per P e sono perpendicolari ad $\mathbf{r}$?

(a) 1;

(b) dipende dalla posizione relativa di P ed $\mathbf{r}$;

(c) infiniti.

Esercizi

1. *(8 punti)* Al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo $f_c \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definito come segue:

$$f_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ cx \end{pmatrix} .$$

(a) *(4 punti)* Per quali c si ha che f_c è diagonalizzabile?

(b) *(4 punti)* Si determinino una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza f_{-1} e la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{-1})$ che rappresenta f_{-1} rispetto a $\mathcal{B}$.

2. *(8 punti)* Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} , \quad V = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(a) *(4 punti)* Si determini la dimensione di $U \cap V$ e quella di $U + V$, una base di $U \cap V$ (se esiste) ed una base di $U + V$.

(b) *(4 punti)* Si estenda la base di $U + V$ trovata al punto (a) ad una base di $\mathbb{R}^3$.

3. *(10 punti)* Si consideri la seguente retta di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, $\mathbf{r} : 2x + y = 1$.

(a) *(4 punti)* Sia S l'insieme dei punti $P \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ tali che $\mathrm{d}(P, \mathbf{r}) = 1$, dove $\mathrm{d}(P, \mathbf{r})$ è la distanza tra il punto P e la retta $\mathbf{r}$. Si dica se S è un sottospazio affine di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$.

(b) *(2 punti)* Sia ora $\mathbf{s} \subset \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ la retta di equazione $\mathbf{s} : -x + 3y = 2$. Si determini la posizione relativa di $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$.

(c) *(4 punti)* Esiste un punto $P \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ tale che $\mathrm{d}(P, \mathbf{r}) = \mathrm{d}(P, \mathbf{s}) = 1$? Nel caso affermativo si determinino le coordinate di un tale P.