Nome .... **Cognome** ....

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

VI appello d'esame — A. A. 2022-2023

17/7/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica se e soltanto se:

   A $M = {}^tM$ B $MM = I_n$ C ${}^tMM = I_n$ D $\det M = \pm 1$

2) Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che

   A $B = M^{-1}AM$
   B $B = A^{-1}MA$
   C $B = {}^tMAM$
   D $B = {}^tAMA$

3) I vettori $(1, t, -2)$ e $(t-1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ sono proporzionali

   A per nessun valore di $t \in \mathbb{R}$
   B solo per $t = 1$
   C per ogni $t \neq 1$
   D solo per $t = 0$
   E nessuna delle precedenti

4) Le colonne di $A \in M_3(\mathbb{R})$ sono base per $\mathbb{R}^3$ se e solo se

   A $\operatorname{rg} A \neq 0$ B $\operatorname{rg} A = 2$ C $\det A = 3$ D esiste A^{-1}

5) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare di rango 2. Allora f

$\boxed{\text{A}}$ è biiettiva $\boxed{\text{C}}$ ammette 0 come autovalore

$\boxed{\text{B}}$ è iniettiva $\boxed{\text{D}}$ è diagonalizzabile

6) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Allora f

$\boxed{\text{A}}$ non può essere iniettiva

$\boxed{\text{B}}$ non può essere suriettiva

$\boxed{\text{C}}$ è suriettiva

$\boxed{\text{D}}$ è iniettiva

$\boxed{\text{E}}$ nessuna della precedenti

7) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{2}\,x - 3y = -1\}$ è

$\boxed{\text{A}}$ un piano affine non vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{B}}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{C}}$ una retta

$\boxed{\text{D}}$ l'insieme vuoto.

8) Il seguente sistema lineare reale dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + y - az = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

è compatibile: $\boxed{\text{A}}$ soltanto per $a = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\forall a \neq 1$ $\boxed{\text{C}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

Esercizi

1) *(12 punti)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$$

dove $\mathbb{R}^2$ si considera munito del prodotto scalare canonico.

(a) *(2 punti)* Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) *(1 punti)* Calcolare $\det f$.

(c) *(1 punti)* f è autoaggiunta?

(d) *(5 punti)* Determinare una base ortonormale diagonalizzante per f.

(e) *(3 punti)* Determinare una matrice $U \in \mathrm{O}(2)$, la sua inversa, e una matrice diagonale D tali che $A = U^{-1} D\, U$.

2) *(6 punti)* Risolvere il seguente sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando anche la struttura dello spazio delle soluzioni

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ x + 2y - kz = k \\ y + z = k \end{cases}$$

3) *(8 punti)* Si consideri in $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, il piano H di equazione

$$H : x + y - z = 1$$

(a) *(5 punti)* Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e ortogonale ad H.

(b) *(3 punti)* Determinare una base ortonormale per la giacitura di H.