

CONDIZIONI DI STATO INIZIALE E STORIA TENSIONALE

COMPRESSIONE EDOMETRICA E CONSOLIDAZIONE

Prof. Ing. Geol. Eugenio Castelli

MECCANICA E MODELLI

La Meccanica è la scienza che permette la «**descrizione completa dei movimenti che avvengono in natura**».

Nel campo della **Meccanica delle terre** sono diversi i settori della Meccanica a cui si può rivolgere l'attenzione per l'analisi della risposta di **un sistema geotecnico**:

- la **Meccanica particellare**, mediante la quale il comportamento di un insieme di particelle viene studiato partendo dal comportamento meccanico della singola particella e dall'interazione con le altre;
- la **Meccanica dei Fluidi**, dedicata a studiare i fenomeni connessi al moto dei fluidi presenti nei vuoti;
- la **Meccanica dei Continui**, che permette di rappresentare la struttura della materia mediante una distribuzione continua di punti materiali.

Prescindendo dalla **natura particellare (granulare)** del terreno (inteso come materiale costituito da particelle e pori contenenti un fluido e quindi fortemente eterogeneo) si può definire un volume omogeneo, a scala maggiore, che si comporti in modo «equivalente» (Meccanica dei Continui).

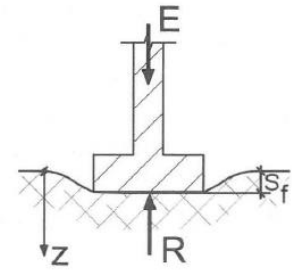
A tal fine si introduce il **PRINCIPIO**, detto degli **SFORZI EFFICACI**, che rappresenta la legge di interazione e di equilibrio interno tra fase solida e fase liquida (l'acqua interstiziale, pensata in questo caso occupante tutto il volume dei vuoti presenti) e che permette di operare in termini di Meccanica dei Continui.

Nelle usuali applicazioni dell'Ingegneria Geotecnica, nella pratica come nella ricerca, è consuetudine riferirsi alla **Meccanica dei Continui**, senza però dimenticare come la natura particellare del terreno (inteso come *mezzo poroso*, composto da struttura solida e vuoti interstiziali) giochi un ruolo fondamentale nella risposta di ogni sistema geotecnico.

Come noto, un corpo solido sottoposto all'azione di carichi può assumere differenti **configurazioni**.

- I. Qualora si abbiano variazioni di forma, o di volume: si definisce **deformazione** la relazione che associa, per un punto materiale del corpo solido, la posizione del punto materiale nella configurazione attuale rispetto ad una configurazione di riferimento (corpo solido deformabile).
- II. Qualora il passaggio dalla configurazione di riferimento a quella attuale non si comporti cambiamenti di forma o di volume, si è in presenza di uno **spostamento rigido** (corpo rigido).

Il processo di deformazione deve risultare **compatibile** con la continuità del sistema materiale: le componenti della deformazione devono pertanto essere tali da assicurare che non si verifichino distacchi o compenetrazioni di materia.



Consideriamo una fondazione (ad es. un plinto in c.a.) che induce un carico esterno sul terreno e si assuma, per semplicità, assenza di acqua nei vuoti interstiziali e che l'insieme formato dai granuli di sabbia e dai pori riempiti di aria possa essere considerato un continuo omogeneo equivalente.

La forza esterna nota E (comprensiva del peso proprio della fondazione) potrà generare, ipotizzando un atto di moto rigido, **un abbassamento s_f della quota della fondazione** e, facendo l'ipotesi di mezzo continuo solido, a forze si possono associare tensioni e a spostamenti deformazioni.

La condizione di equilibrio, in termini di forze, è esprimibile come: $E = R$; **l'equilibrio è pertanto garantito se il terreno è in grado di fornire, in questo caso, una reazione globalmente pari a R .**

«Equilibrio» e «congruenza» per una fondazione superficiale

Per quanto riguarda gli spostamenti all'interno del terreno, considerato un continuo deformabile sottoposto al carico E , si verificheranno cambiamenti di configurazioni e quindi deformazioni (di forma e/o di volume) e spostamenti (macroscopicamente osservabili).

Assumendo che la fondazione si comporti come corpo rigido rispetto al terreno (condizione spesso verificata nella realtà) e che quindi abbia uno spostamento uniforme s_f , **la condizione di congruenza** implica che esso sia pari allo spostamento del terreno, così da risultare: $s_f = s_t$; ciò che significa che la fondazione subisce uno spostamento s_f se gli spostamenti del terreno sono, globalmente, pari a s_t .

Queste relazioni possono essere esplicitate anche in termini di tensioni e deformazioni: **le tensioni medie sulla superficie di contatto della fondazione di area A , pari a $\sigma = E / A$, saranno in equilibrio con le pressioni $q = R / A$ che il terreno è in grado di fornire.**

Lo spostamento verticale sotto la fondazione (cedimento) potrà essere espresso come: $s_t = \int_0^\infty \varepsilon_z dz$ essendo ε_z le deformazioni verticali nel terreno.

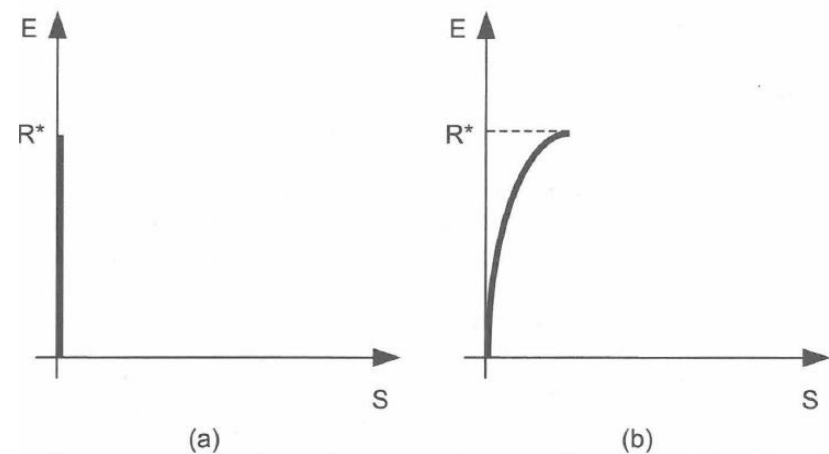
Limitando l'integrazione di queste entro una porzione di terreno «significativa» di spessore H : $s_t = \int_0^H \varepsilon_z dz$

L'introduzione di **enti statici (forze-tensioni)** permette la definizione di **condizioni di tipo globale di equilibrio**, mentre quelle di **compatibilità** sono riferite ad **enti cinematici (spostamenti-deformazioni)**: per poter mettere in relazione, ad esempio di causa-effetto, tali enti meccanici (una determinata forza/tensione genera un determinato spostamento/deformazione), su un particolare materiale, è necessario definire un **legame costitutivo del materiale** stesso che è governato dalle caratteristiche meccaniche dei singoli materiali e le relazioni matematiche che lo definiscono **permettono di valutare l'entità delle deformazioni associate a un determinato stato di tensione.**

Nel campo $E \leq R^*$:

- un legame in termini di forze e spostamenti del tipo: $s_f = s_t = 0$ definisce la risposta di un **materiale perfettamente rigido**, almeno fino al raggiungimento di un valore massimo della forza R^* (curva a);
- per un **materiale caratterizzato, invece, da un legame del tipo: $s_t = k \cdot E$** , gli spostamenti sono esprimibili in funzione delle forze applicate, tramite una **funzione k , di tipo lineare o non lineare**, (curva b).

La **scelta e definizione del legame costitutivo** è una delle fasi più importanti e delicate di un problema meccanico e, nel caso dei terreni, le difficoltà sono prevalentemente legate al fatto che il materiale in esame è naturale e multifase.



Si osserva inoltre che per taluni materiali (detti «con memoria») il **comportamento può dipendere dai processi subiti nel tempo precedente a quello attuale**. L'insieme di tali processi è detto «storia del materiale»: essa determina la risposta meccanica del materiale e, quindi, la definizione del legame costitutivo.

I terreni sono un esempio tipico di materiale dotato di memoria; il comportamento è influenzato sia dalla storia geologica, sia da processi di storia «recente», misurabile in tempi confrontabili con quelli della vita di esercizio di un'opera (nell'ordine della decina di anni).

Questo rende ulteriormente complessa la definizione di un legame costitutivo di validità generale per i terreni.

Dovendo affrontare e risolvere problemi di carattere pratico, è tuttavia necessario disporre di strumenti di analisi che coniughino rigore metodologico, affidabilità dei risultati e semplicità applicativa. È quindi prassi usuale ricorrere ad opportuni **modelli semplificati**, utili e necessari per comprendere determinati comportamenti di singoli elementi e di opere reali, almeno da un punto di vista fenomenologico. I modelli semplificati permettono di focalizzare l'attenzione sugli aspetti principali di un problema e di tralasciare (almeno in una prima fase di analisi) quelli ritenuti meno rilevanti.

Da evidenziare che **la scelta di un modello può dipendere anche dall'applicazione per la quale esso viene utilizzato**.

In un'analisi approfondita del nodo di collegamento tra diversi elementi strutturali deve essere studiato nei dettagli geometrici e costruttivi, anche **il vincolo in fondazione**, spesso idealizzato nelle analisi «strutturali» come **non cedevole** (assenza spostamenti verticali), dovrà essere valutato in relazione alla reale risposta del terreno ai carichi applicati (analisi di interazione terreno-struttura).

La schematizzazione che si può adottare per gli elementi strutturali è applicabile anche ai geomateriali: poiché **un legame costitutivo è una descrizione matematica del comportamento macroscopico di un materiale reale, attuata tramite relazioni (equazioni costitutive) che coinvolgono grandezze meccaniche quali tensioni e deformazioni**, si può ricorrere ad **equazioni costitutive formulate per materiali ideali, cioè materiali per i quali il comportamento viene descritto da un legame capace di interpretare la risposta sperimentale del materiale reale a cui ci si riferisce**.

Questo è particolarmente utile nel campo dell'Ingegneria Geotecnica, ove è necessario utilizzare dati riferibili a «campioni rappresentativi» per analizzare il comportamento di un volume di terreno molto maggiore, a cui tali campioni appartengono.

Nei terreni la risposta all'applicazione di sollecitazioni esterne è estremamente più complessa rispetto ad es. all'acciaio; soltanto in condizioni molto particolari o nel caso di provini di roccia, è possibile applicare una sollecitazione di compressione semplice analoga alla condizione di trazione monoassiale del provino metallico.

A causa della natura granulare un provino di terra dovrà essere, in generale, contenuto lateralmente, per prevenire il collasso istantaneo sotto il proprio peso o per modestissimi carichi applicati.

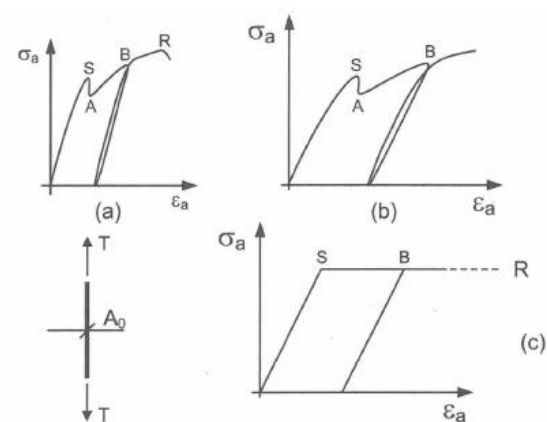
Ciononostante **il comportamento tensione-deformazione dei terreni può essere descritto da modelli essenzialmente simili a quelli dei metalli o di altri materiali, anche se differenti sono i parametri che li caratterizzano**.

La differenza principale (e questo è aspetto di notevolissima importanza) è legata alla molto maggiore quantità di volume occupato, nel materiale terra, dai vuoti (come già detto riempiti da fluidi).

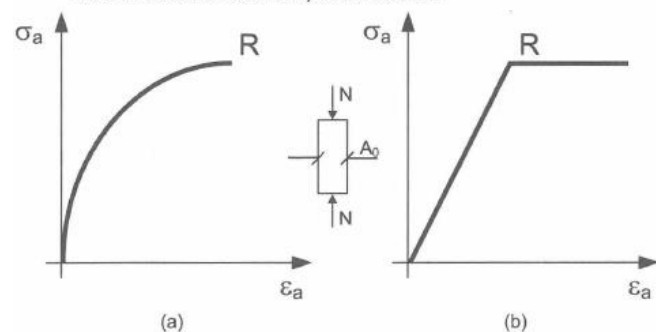
Quando il terreno si deforma si possono verificare significative e spesso irreversibili deformazioni di volume (dovute alla struttura porosa del terreno) a differenza di quanto avviene per i metalli, per i quali le deformazioni volumetriche sono essenzialmente nulle.

In figura 1.3 si riportano schematicamente tali evidenze indicando con $\epsilon_v = \Delta V / V_0$ le deformazioni di volume (ΔV : variazioni di volume; V_0 : volume iniziale) per due materiali (a) $\epsilon_v = 0$; (b) $\epsilon_v \neq 0$.

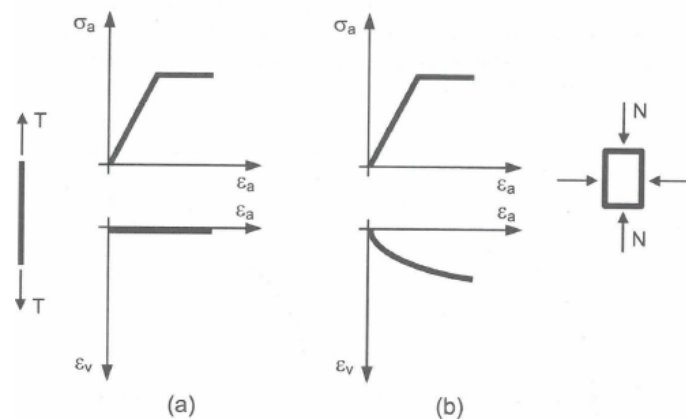
Si deve considerare che nonostante sia possibile considerare il terreno quale mezzo continuo (la dimensione dei grani che lo compongono è «piccola» rispetto alle dimensioni di un suo volume rappresentativo o dell'opera in esame) la natura particellare e porosa ne condiziona significativamente il comportamento.



Barra di acciaio da c.a. sottoposta a trazione



1.6 Provino di terreno sottoposto a compressione



g. 1.7 Semplici schemi di deformazioni volumetriche per due materiali

RESISTENZA E DEFORMABILITÀ

Le figure a e b riportano possibili risposte, a sollecitazioni esterne, rispettivamente:

- di un'opera geotecnica (una fondazione superficiale);
 - di un elemento di terreno (provino di laboratorio di altezza unitaria);
- sottoposti a carico.

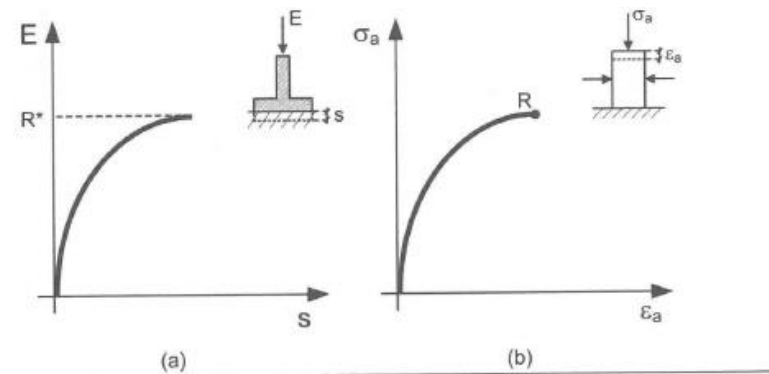
Risulta evidente l'analogia tra la risposta (*forza E - spostamento s*) della fondazione e quella (*tensione σ_a - deformazione ε_a*) dell'elemento di terreno. Nell'ambito in esame si può preliminarmente definire:

- **resistenza:** il valore della massima sollecitazione sopportabile dell'elemento in esame;
- **rigidezza:** la proprietà del materiale che ne determina deformazioni e spostamenti.

La figura di dx riporta esempi schematici di comportamenti differenti, associabili sia al caso della fondazione che dell'elemento di terreno: **la risposta «tipo A» è caratterizzata da elevata rigidezza ed elevata resistenza**, non riscontrabili, invece, nel caso B.

I problemi maggiormente ricorrenti nella pratica geotecnica sono:

- problemi di deformazione (calcolo spostamenti);
 - problemi di resistenza (valutazione condizioni di instabilità);
- accadrà spesso che, invece di trattare unitariamente un fenomeno deformativo per l'intero suo sviluppo fino al raggiungimento di una condizione di instabilità (rottura) del materiale, verranno affrontati separatamente i due problemi come se non fossero aspetti dello stesso fenomeno.



Analogia di comportamento tra opera geotecnica ed elemento di volume

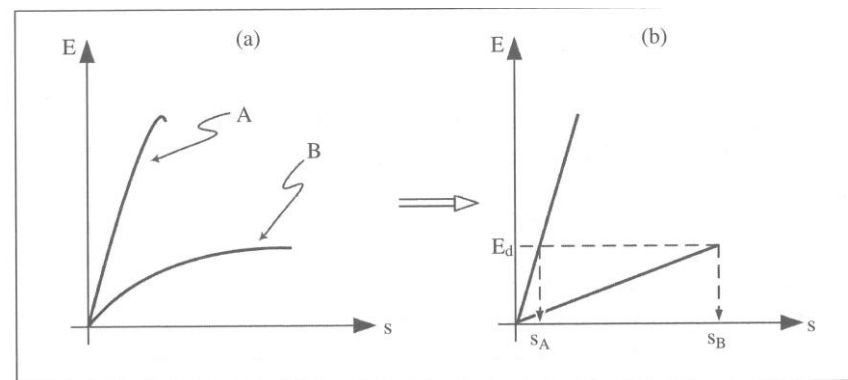


Fig. 1.10 Semplificazione adottata per problemi di deformazione

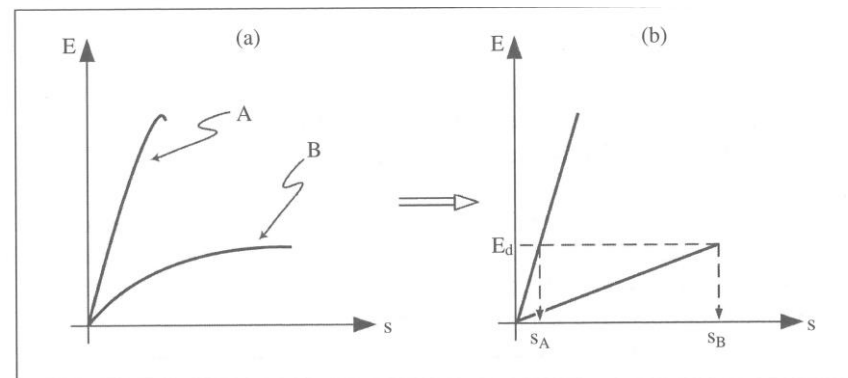
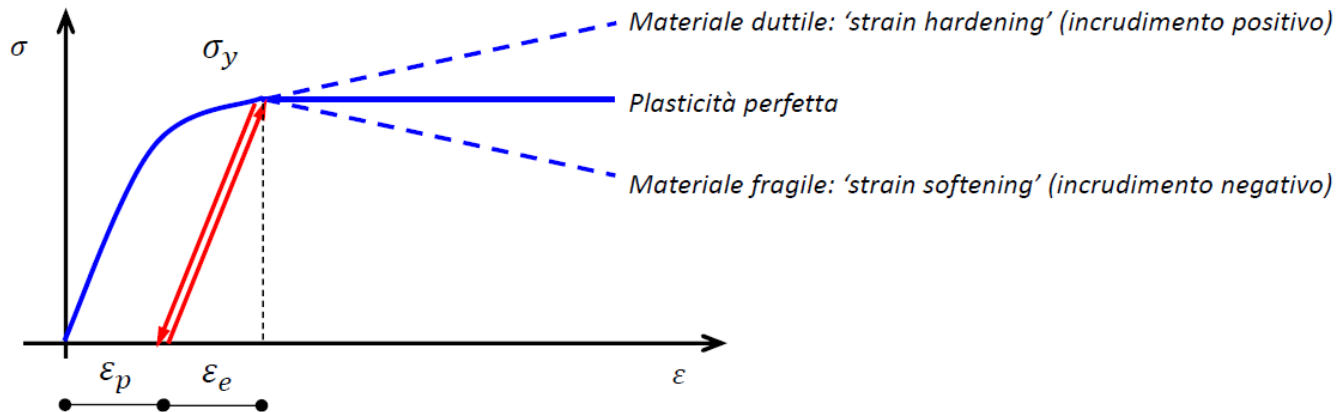


Fig. 1.10 Semplificazione adottata per problemi di deformazione

MODELLI DEI TERRENI E DI COMPORTAMENTO

Gli aspetti principali di cui ogni **modello** deve tenere conto sono i seguenti:

- il **legame sforzi-deformazioni** in genere **non è lineare** anche nell'ambito di un comportamento elastico;
- una cospicua aliquota delle **deformazioni totali** è **irreversibile**;
- le caratteristiche sforzi-deformazioni-resistenza dipendono dalla **tensione di confinamento** e dalle **condizioni di deformazione**;
- si ha interazione tra le varie fasi costituenti il terreno e si deve prevedere la **pressione interstiziale** generata da ogni variazione dello stato tensionale;
- vi sono fenomeni di **dilatanza** (aumento di volume dovuto alla riorganizzazione delle particelle sotto la pressione delle azioni esterne) e dipendono dalla tensione di confinamento;
- si ha **comportamento instabile** (strain-softening) dei materiali sabbiosi molto addensati e delle argille sovraconsolidate;
- le caratteristiche sforzi-deformazioni-resistenza dipendono anche dalla **direzione di sollecitazione (anisotropia)**.



Agli aspetti ora elencati, già notevolmente complicati, vanno poi eventualmente sommati quelli dipendenti da **fenomeni di viscosità strutturale** (tixotropia, rilassamento, creep).

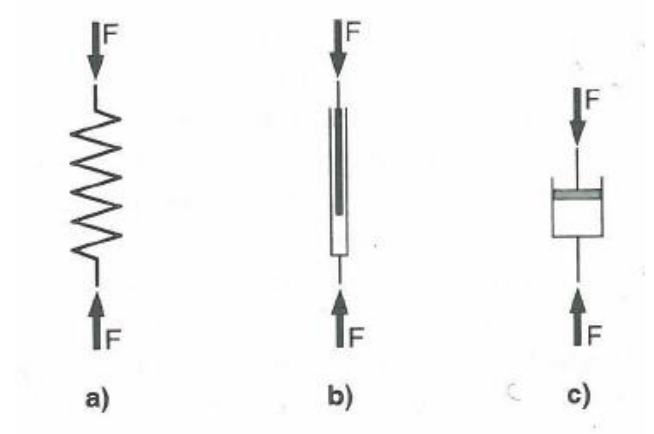
Ne consegue l'impossibilità di avere un unico modello in grado di descrivere tutti i sopramenzionati aspetti e la necessità quindi di **individuare correttamente i limiti di applicazione** e il significato fisico dei parametri che essi utilizzano nell'ambito dei modelli più semplici. La meccanica dei terreni ricorre pertanto all'impiego di **modelli reologici, ovvero di schemi più o meno semplificati, per l'interpretazione di fenomeni fisici complessi e per la previsione del comportamento dei vari mezzi in seguito all'applicazione di un sistema di sollecitazioni.**

La reologia studia l'andamento delle deformazioni nella materia sotto l'effetto dell'applicazione di un sistema di sollecitazioni; essa cerca di caratterizzare il comportamento meccanico dei materiali mediante la definizione di modelli matematici che stabiliscano dei legami tra tensioni, deformazioni e tempo (detti **legami costitutivi**).

Un modello reologico non è legato solo al tipo di materiale, ma anche e soprattutto al fenomeno fisico che lo interessa; per questo motivo la scelta del tipo di modello è strettamente dipendente oltre che dal tipo di materiale, da quello dell'applicazione ingegneristica considerata.

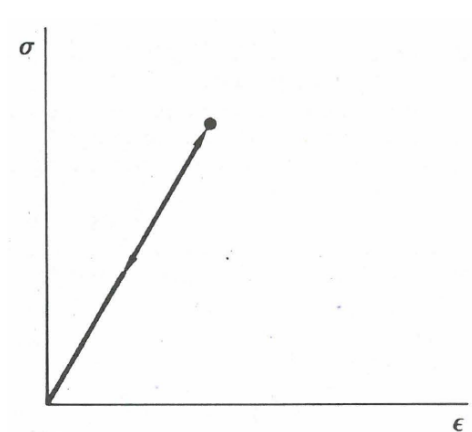
Tra i modelli reologici "classici", che possono essere assunti singolarmente o in combinazione tra loro, quelli di maggiore interesse nell'ambito della meccanica dei terreni sono:

- a) il modello **elastico**
- b) il modello **plastico**
- c) il modello **viscoso**



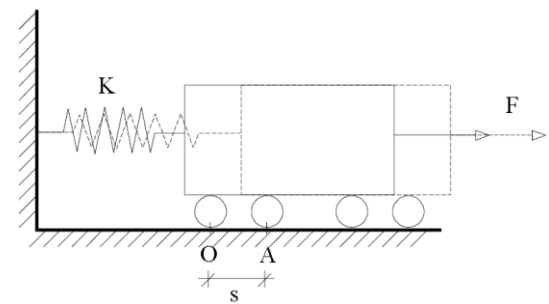
COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE. Il modello più impiegato nella Meccanica dei terreni e delle rocce è quello *elastico lineare*; esso è applicato soprattutto perché è così possibile disporre di numerose soluzioni della teoria classica dell'elasticità, relativamente semplici e assai utili per la soluzione di molti problemi applicativi.

In questo caso, la relazione sforzi-deformazioni è di tipo lineare, le deformazioni considerate sono piccole e risulta applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti.



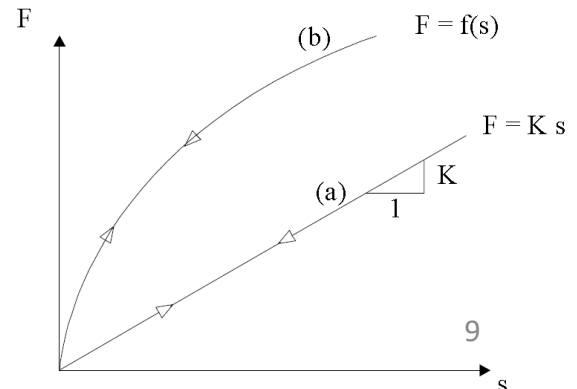
Modello elastico. Il comportamento di un corpo è definito elastico se le deformazioni prodotte da un sistema di sollecitazioni scompaiono una volta rimosse tali sollecitazioni. La relazione sforzi deformazioni è biunivoca e indipendente dal tempo: una stessa sollecitazione produce sempre la stessa deformazione anche se applicata ripetutamente. Il simbolo comunemente usato per rappresentare l'elasticità di un mezzo è una molla, e lo schema monodimensionale semplificato è quello **di Hooke**.

Se si immagina di applicare una forza F all'estremità libera del carrello e di registrarne lo spostamento s , la relazione tra F ed s è del tipo: $F = f(s)$.



Se $f(s)$ è una funzione lineare (linea (a)), ovvero: $F = K \cdot s$ con $K =$ costante, si parla di **comportamento elastico-lineare**, con K costante elastica del mezzo.

Se dipende dal livello di sforzo (o di deformazione) raggiunto (curva (b)), si parla di legame elastico non lineare. La funzione che rappresenta un legame elastico non lineare può essere approssimata con una funzione lineare a tratti, su intervalli opportunamente piccoli dello spostamento.



Le principali applicazioni geotecniche per le quali viene spesso assunta l'ipotesi di comportamento elastico del terreno sono:

- il calcolo delle deformazioni nei terreni sovraconsolidati;
- l'analisi della diffusione delle tensioni nel terreno;
- il calcolo delle strutture di fondazione.

Comportamento elastico non lineare. La maggior parte dei terreni, anche in condizioni lontane da quelle corrispondenti alla resistenza limite, rivela un comportamento non lineare; questo accade nei terreni: sabbiosi poco addensati e limoso argillosi normalmente consolidati.

Spesso è perciò conveniente definire:

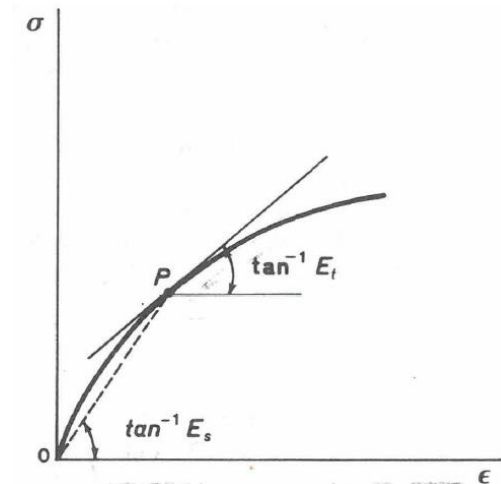
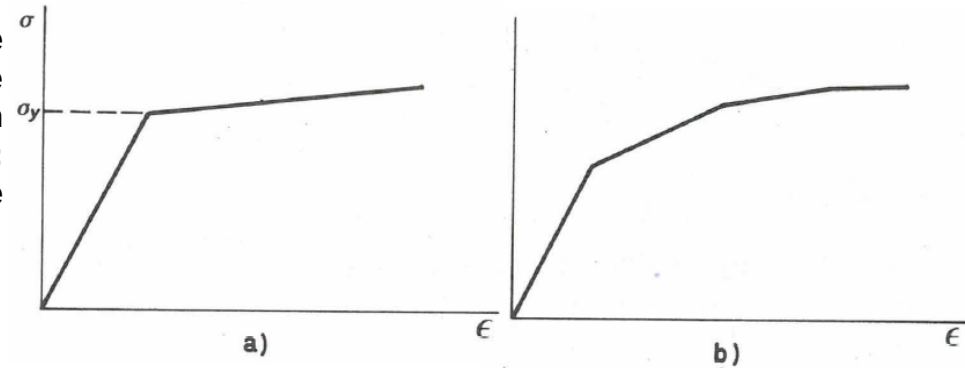
$$E_t = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_P \approx \left. \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \right|_P$$

$$E_s = \left. \frac{\sigma}{\varepsilon} \right|_P$$

$$\mu_t = \left. \frac{d\varepsilon_t}{d\varepsilon} \right|_P \approx \left. \frac{\Delta\varepsilon_t}{\Delta\varepsilon} \right|_P$$

$$\mu_s = \left. \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \right|_P,$$

dove: E_t ed E_s sono i **moduli di elasticità tangenti e secanti**; μ_t e μ_s sono i corrispondenti rapporti di Poisson.



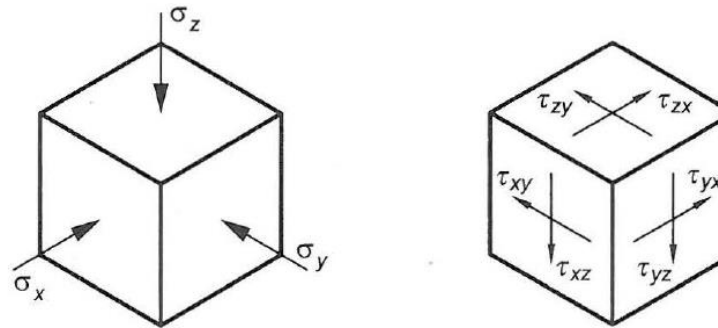
MEZZO TRASVERSALMENTE ISOTROPO

Durante la fase di sedimentazione e successiva consolidazione, **i terreni sono soggetti a deformazioni monodimensionali, ossia l'elemento di volume si deforma in direzione verticale senza deformazioni laterali.**

I terreni rivelano, nella maggior parte dei casi, un **comportamento meccanico anisotropo**: essi sono spesso depositati per strati e caratterizzati da uno stato di tensione iniziale ($\sigma_v, \sigma_h = K_0 \sigma_v$), esso pure anisotropo.

L'anisotropia iniziale del materiale riflette questa storia del deposito, per cui ci si trova a esaminare un mezzo che ha un asse di simmetria (asse verticale), con il piano a esso ortogonale (piano orizzontale) isotropo. Il mezzo così descritto è indicato come **mezzo trasversalmente isotropo** per il quale si definiscono un piano di simmetria elastica e un asse di rotazione.

I legami tra le componenti di sforzo e di deformazione sono sotto riassunti nella figura da cui risulta che il comportamento del mezzo risulta caratterizzato da 5 costanti indipendenti: E_V E_H G_{VH} ν_{VH} ν_{HH}



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_H} [\sigma_x - \nu_{HH} \cdot \sigma_y - \nu_{HV} \cdot \sigma_z]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{HH}} \cdot \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_H} [-\nu_{HH} \cdot \sigma_x + \sigma_y - \nu_{HV} \cdot \sigma_z]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_{HV}} \cdot \tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_V} [-\nu_{VH} \cdot \sigma_x - \nu_{VH} \cdot \sigma_y + \sigma_z]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G_{HV}} \cdot \tau_{zx}$$

$$\nu_{HV} = \nu_{VH} \cdot \frac{E_H}{E_V}$$

$$G_{HH} = \frac{E_H}{2(1+\nu_{HH})}$$

MODELLO PLASTICO

Il comportamento di un corpo è definito **plastico** se, raggiunta una determinata soglia di sollecitazione, si manifestano **deformazioni permanenti** (ossia che si conservano anche una volta rimosse le sollecitazioni) e **indipendenti dalla durata delle sollecitazioni applicate**.

La relazione sforzi-deformazioni è quindi indipendente dal tempo e non biunivoca: ad uno stesso valore della deformazione, s , possono corrispondere valori diversi della sollecitazione, F .

La plasticità di un mezzo può essere rappresentata mediante un pattino ad attrito, secondo lo schema monodimensionale semplificato **di Coulomb**.

Se si immagina di applicare una forza F all'estremità libera del carrello collegato al pattino, si osserva che non si hanno spostamenti fino a che la sollecitazione non raggiunge un valore limite F^* .

In corrispondenza di tale valore lo spostamento plastico può:

- 1. Avvenire a forza applicata costante (mezzo plastico perfetto) (linea (a)).
- 2. Progredire con aumento della forza applicata (linea (b)) o diminuzione della forza applicata (linea (c)), si parla, rispettivamente, di mezzo incrudente positivamente (incrudimento – hardening) o negativamente (rammollimento – softening).

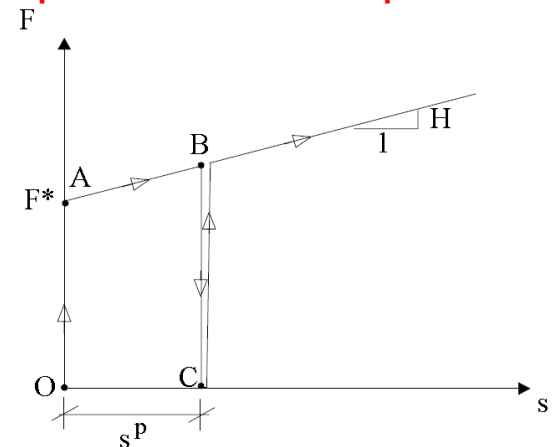
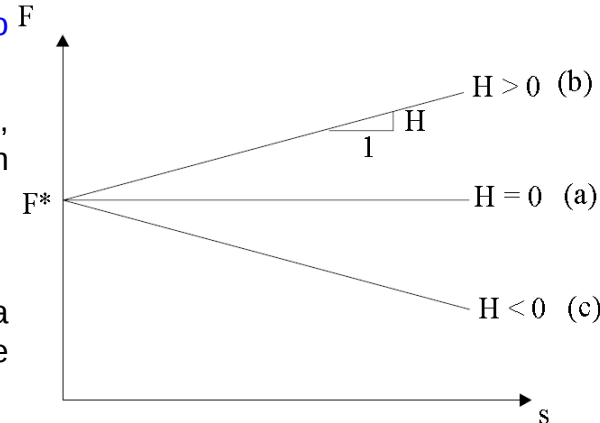
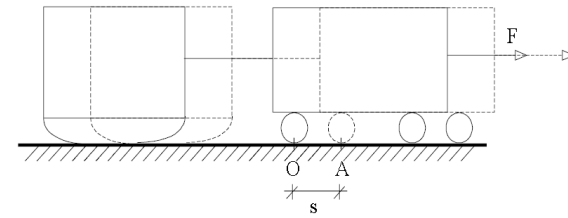
Annullando la forza F non si ha alcun recupero dello spostamento accumulato; incrementando nuovamente la forza F il pattino rimarrà fermo nella posizione assunta sotto il carico precedente, fino a che l'intensità della forza applicata non raggiunge il nuovo valore limite F^* , che **sarà uguale al precedente per mezzo plastico perfetto, maggiore per mezzo incrudente positivamente, minore per mezzo incrudente negativamente**.

La relazione tra lo spostamento plastico, ds^p , e l'aliquota di forza che eccede F^* , dF^* , è del tipo:

$$ds^p = \frac{1}{H} dF^*$$

dove H , detto **coefficiente di incrudimento**, sarà uguale a zero per mezzo plastico perfetto, positivo per mezzo incrudente positivamente, negativo per mezzo incrudente negativamente.

Nelle applicazioni geotecniche l'ipotesi di comportamento plastico è assunta nella trattazione dei problemi di stabilità, per i quali si fa riferimento alle condizioni di equilibrio limite (capacità portante delle fondazioni, stabilità dei pendii, delle opere di sostegno, ecc..)

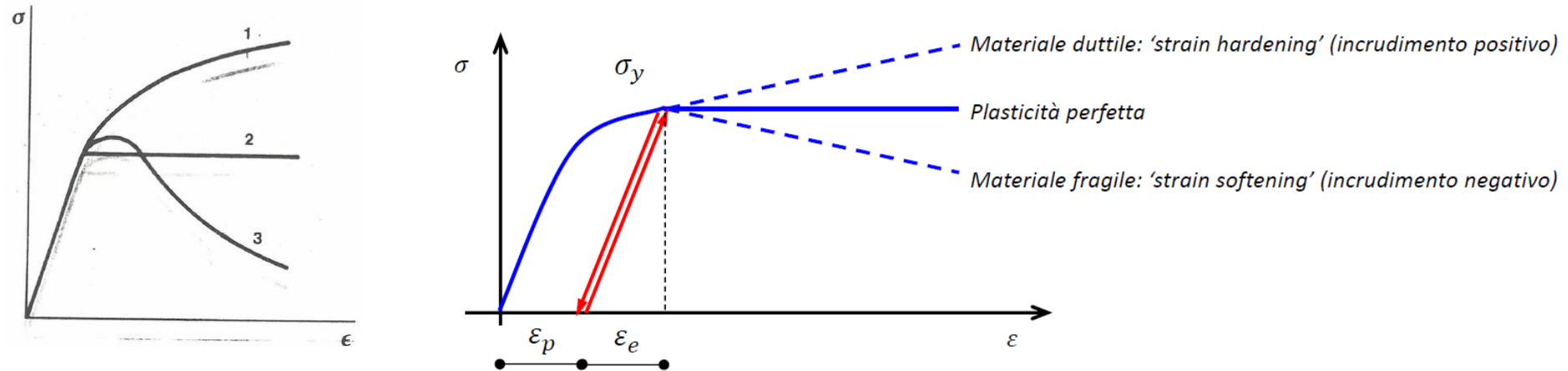


COMPORTAMENTO ELASTO-PLASTICO.

Nel caso si ricorra alle leggi costitutive della teoria della plasticità la curva tensioni-deformazioni è solitamente divisa in due parti distinte: una, di tipo elastico, prima del limite di elasticità; l'altra di tipo plastico, dopo questo limite. In particolare, facendo riferimento a questa seconda parte, si distinguono i comportamenti illustrati in figura.

Per definire il comportamento di un materiale elastico-plastico è quindi necessario disporre:

- della legge costitutiva per la zona a comportamento elastico;
- di un criterio che consente di stabilire un limite oltre il quale non è più possibile il comportamento elastico;
- di una legge costitutiva da applicare per descrivere il comportamento nella fase plastica.



Esempi di comportamento elasto-plastico:

1. elasto-plastico con incrudimento (hardening);
2. elastico perfettamente plastico;
3. elasto-plastico con rammollimento (softening).

MODELLO VISCOSO.

Il mezzo viscoso è caratterizzato da deformazioni permanenti che si sviluppano con una velocità legata alla sollecitazione applicata. **La velocità di deformazione si annulla all'annullarsi della sollecitazione.**

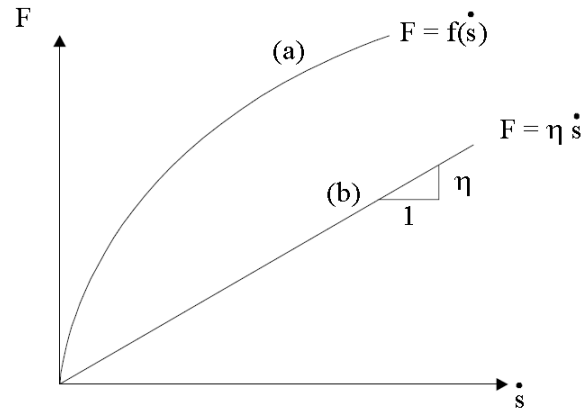
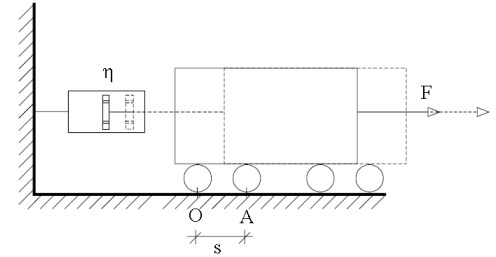
Il modello di **mezzo viscoso** è caratterizzato dall'esistenza di **un legame tra la sollecitazione applicata e la velocità di deformazione corrispondente** che esprime la «velocità $\dot{u}$ » di spostamento relativo tra due piani paralleli posti alla distanza “a” e che scorrono con la sostanza liquida.

Il simbolo con cui si rappresenta la viscosità di un mezzo è lo smorzatore viscoso (o ammortizzatore idraulico) costituito da un pistone forato che scorre in un cilindro pieno di liquido.

Lo schema monodimensionale semplificato del modello è in genere quello dovuto a **Newton**.

Se si immagina di applicare una forza F all'estremità libera del carrello e di registrarne lo spostamento s , si osserva una relazione tra F e la **velocità di spostamento $\dot{s}$ (puntato) = ds/dt** (linea (a): comportamento di un **mezzo viscoso**).

Se $f(s)$ è una funzione lineare (linea (b): si ha **il comportamento di un mezzo viscoso perfetto o newtoniano**, con η viscosità del mezzo).



COMPORTAMENTO DEI MATERIALI

L'applicazione di una sollecitazione ad ogni materiale causa in genere una deformazione ed una distorsione.
Qualora non si abbia alcuna deformazione o distorsione si dice che il materiale è rigido.

Se sotto l'applicazione di una sollecitazione si hanno deformazioni o distorsioni del materiale anche variabili nel tempo, ma che raggiungono un valore finito, mentre è mantenuto lo stato di tensione, allora si dice che il materiale è solido.

Gli elementi di un solido possono trasmettere, attraverso ogni sezione, oltre alle componenti normali delle sollecitazioni anche componenti tangenziali.

Un materiale, le cui proprietà in un punto si manifestano ugualmente in tutte le direzioni, è detto isotropo; se queste proprietà sono anche costanti in tutti i punti della massa il materiale è detto omogeneo.

La **risoluzione di un generico** problema di Ingegneria Geotecnica prende le mosse dalla conoscenza:

1. della natura dei terreni in esame;
2. delle loro condizioni di stato iniziale.

Nel **primo caso** le indagini identificative e i sistemi di classificazione forniscono sufficienti e preliminari indicazioni in merito.

Nel **secondo caso** è necessario associare alla conoscenza di indice dei vuoti, contenuto d'acqua naturale e densità relativa (proprietà indicative di uno «stato» del terreno) grandezze riferibili allo stato di tensione esistente nel terreno. Si potrà così definire la condizione iniziale nella quale si trova un determinato elemento, che potrà essere soggetto a modifiche del suo stato dovuto ad interventi naturali e/o antropici, quali applicazione di carichi, scavi, cambiamenti di condizioni al contorno ecc.

Per valutare lo stato di tensione cui il terreno è soggetto (nelle condizioni iniziali e in quelle conseguenti alle modifiche in atto) si ricorre all'ipotesi di **mezzo continuo**, in cui la natura porosa e multifase verrà opportunamente considerata attraverso il **principio delle tensioni totali ed efficaci**; il cui significato è da ricercare nel principio, detto degli **SFORZI EFFICACI**, che rappresenta la legge di interazione e di equilibrio interno tra la componente solida (i grani) e quella fluida (l'acqua presente nei pori) dell'elemento continuo ideale.

Adottando per il terreno l'ipotesi di mezzo continuo è possibile operare in termini di *tensioni* e *deformazioni*.

Nella maggioranza dei casi di interesse per un materiale granulare i carichi sono di compressione rivolti cioè verso la superficie del generico elemento in questione; per tale ragione in geotecnica si assumono positive le *tensioni normali di compressione* σ . Analogamente, positive saranno le *deformazioni longitudinali (dilatazioni lineari)* ϵ ad esse associate.

In geotecnica hanno fondamentale importanza le ***tensioni tangenziali*** τ ed i relativi ***scorrimenti (dilatazioni) angolari o deformazioni di taglio*** γ . Per convenzione, le tensioni tangenziali sono positive se inducono una rotazione antioraria.

Lo stato di tensione e lo stato deformativo sono rappresentabili rispettivamente attraverso il tensore di sforzo di Cauchy (T) ed tensore doppio simmetrico di deformazione infinitesima (E).

Le componenti sulla diagonale principale indicano le *tensioni normali* essendo le altre quelle **tangenziali**; il tensore è simmetrico e pertanto vale

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

$$\mathbf{T} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Le componenti sulla diagonale forniscono le *dilatazioni lineari* mentre i termini fuori diagonale sono proporzionali alle dilatazioni angolari tra fibre originariamente ortogonali tra loro

$$\mathbf{E} = [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

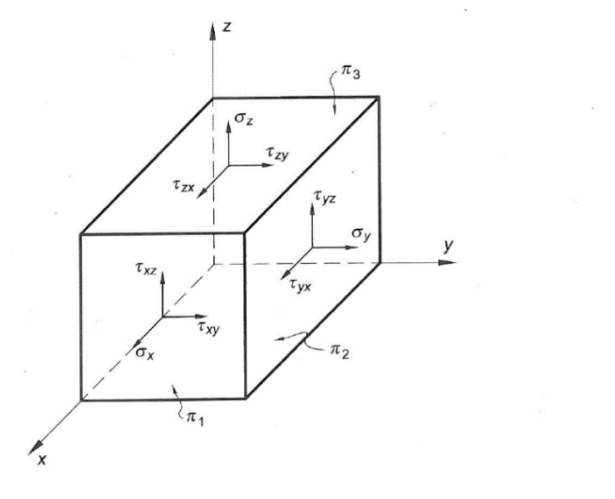


FIGURA 2.9 Notazione convenzionale delle componenti di tensione.

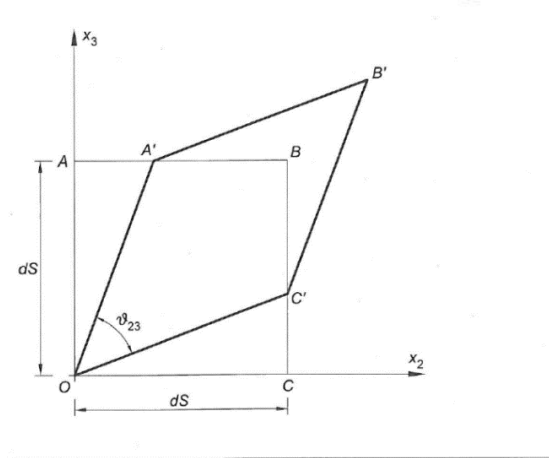


FIGURA 2.4 Esempio di deformazione piana.

Il tensore degli sforzi può essere scomposto in una parte *isotropa* ed una *deviatorica*: $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij}$

in cui compaiono: il *deviatore di tensione*, di componenti s_{ij} , e la *pressione media*:

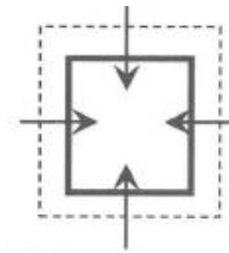
$$p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

Anche per il tensore di deformazione può essere utile una scomposizione in una parte isotropa e una deviatorica:

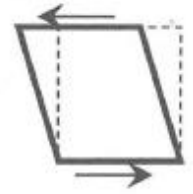
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij} + e_{ij}$$

in cui **alla parte deviatorica si associano variazioni di forma** dell'elemento continuo in esame, mentre le **variazioni di volume sono rappresentate dalla deformazione di volume**:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk}$$



variazione di volume



variazione di forma

Modi di deformazione: deformazioni volumetriche e di taglio

La scomposizione dei tensori di sforzo e di deformazione trova motivazione nell'osservazione che, **per un materiale a comportamento elastico e isotropo, l'applicazione della componente isotropa dello sforzo genera solo variazione di volume senza variazione di forma, mentre l'applicazione del deviatore coinvolge solo variazione di forma.**

Nei terreni, il cui comportamento meccanico non è, in generale, schematizzabile con tale modello ideale, si verifica frequentemente l'«accoppiamento» di deformazioni deviatoriche e volumetriche.

Nell'analisi dello stato di sforzo del generico punto materiale è utile definire, tra gli infiniti piani per esso passanti, quelli caratterizzati da componenti tangenziali τ nulle e giaciture su cui è quindi presente unicamente la tensione normale σ . **IN tal modo si definiscono: i piani, le direzioni e le tensioni principali.**

Per le tre tensioni principali vale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. La maggiore e la minore delle tensioni principali costituiscono rispettivamente la tensione normale massima e minima fra tutte quelle affioranti sui piani della stella nel punto considerato.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Gli **invarianti del primo, secondo e terzo ordine** (rispettivamente I_1 ; I_2 ; I_3) definiti come:

permettono una classificazione degli stati tensionali, che può risultare utile nell'analisi dello stato di sforzo in provini di laboratorio e nei terreni interessati da opere geotecniche:

- Uno stato tensionale è **monoassiale** se $I_2 = I_3 = 0$.
- Uno stato tensionale è **biassiale** se $I_3 = 0$.
- Uno stato biassiale è anche **piano** quando il vettore di tensione appartiene, qualunque giacitura si consideri, al piano ortogonale alla direzione principale associata alla tensione principale nulla.
- Uno stato di tensionale è **triassiale** se $I_3 \neq 0$.
- Uno stato triassiale è detto **idrostatico** se le tre tensioni principali coincidono, cioè $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = (I_1)/3$.

Stati di tensione e di deformazione possono essere analizzati nelle tre dimensioni anche se **nelle applicazioni geotecniche sono relativamente comuni i casi in cui è possibile rappresentare lo stato tensionale e deformativo in due sole dimensioni.**

Ad esempio, qualora si verifichi che l'elemento in esame presenti **una dimensione decisamente più grande rispetto alle altre due, risultando le forze agenti nel piano perpendicolare a tale direzione risultano indipendenti da essa;** accade per: opere di sostegno, travi di fondazioni, gallerie, dighe, canali, rilevati, pendii.

Supponendo che le forze di volume e le forze di superficie siano ortogonali all'asse x e si mantengano costanti in tale direzione, ogni sezione, che risulti sufficientemente lontana dall'estremità dell'opera, **si trova in condizioni di deformazione piana**, giacché la componente dello spostamento nella direzione x deve essere nulla.

Ogni sezione appartenente a tali piani è una sezione di simmetria e quindi le deformazioni in direzione ortogonale ad essa (x) sono nulle. Questa condizione è detta di **deformazione piana**: in tale caso si possono analizzare gli stati di tensione e deformazione appartenenti solo al piano della sezione considerata (a cui appartengono le uniche componenti non nulle del tensore di deformazione) e ciò semplifica molto la rappresentazione e i calcoli.

Ovviamente, affinché tale sezione possa essere considerata rappresentativa del sistema geotecnico in esame, in direzione ortogonale ad essa deve verificarsi una sufficiente «invarianza» **nella geometria, nelle caratteristiche dei terreni e negli eventuali carichi applicati.**

Un'altra condizione ricorrente è quella detta di **simmetria assiale o assialsimmetria**. Casi pratici di tale condizione si ritrovano nel terreno in asse ad uno scavo circolare e sotto l'asse di una fondazione circolare (o, con qualche approssimazione, quadrata).

Per l'analisi del problema assialsimmetrico è sufficiente considerare le tensioni e le deformazioni in un piano contenente l'asse di simmetria.

Condizioni assialsimmetriche si replicano in laboratorio utilizzando provini cilindrici ed opportune condizioni di sollecitazione.

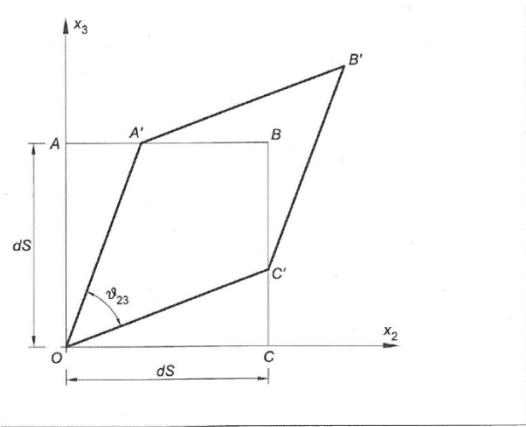
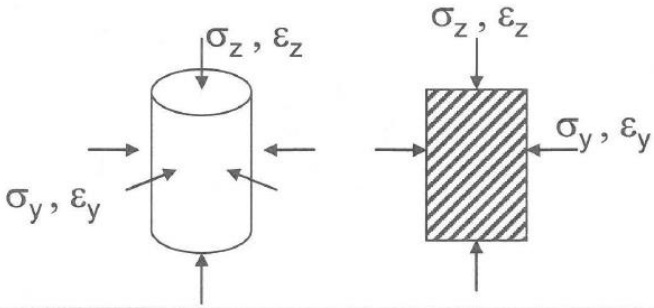
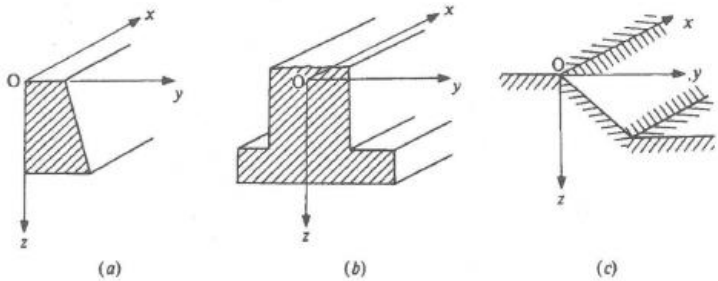


FIGURA 2.4 Esempio di deformazione piana.



Condizioni assialsimmetriche

Per le verifiche di resistenza delle opere geotecniche è necessario valutare quali sono gli stati di tensione massimi sopportabili dal terreno in condizioni di incipiente rottura.

La resistenza al taglio di un terreno in una direzione è la massima tensione tangenziale, τ_f , che può essere applicata alla struttura del terreno, in quella direzione, prima che si verifichi la “rottura” corrispondente alla condizione in cui le deformazioni sono inaccettabilmente elevate.

La rottura può essere:

improvvisa e definitiva, con perdita totale di resistenza (come avviene generalmente per gli ammassi rocciosi)

oppure può avere luogo dopo grandi deformazioni plastiche, senza completa perdita di resistenza, come si verifica spesso nei terreni.

Nella Meccanica dei Terreni si parla di resistenza al taglio, perché in tali materiali, a causa della loro natura particellare, le deformazioni (e la rottura) avvengono principalmente per scorrimento relativo fra i grani.

Per la soluzione dei problemi di meccanica del terreno è possibile, in virtù del principio delle tensioni efficaci, riferirsi al terreno saturo (mezzo particellare con gli spazi fra le particelle riempiti da acqua) come alla sovrapposizione nello stesso spazio di due mezzi continui: un continuo solido corrispondente alle particelle di terreno, ed un continuo fluido, corrispondente all'acqua che occupa i vuoti interparticellari.

In tal modo è possibile applicare anche ai terreni i ben più familiari concetti della meccanica dei mezzi continui solidi e della meccanica dei mezzi continui fluidi.

Le tensioni che interessano il continuo solido sono quindi le **tensioni efficaci**, definite dalla differenza tra le tensioni totali e le pressioni interstiziali: $\sigma' = \sigma - u$. **A queste, in base al principio delle tensioni efficaci, è legata la resistenza al taglio dei terreni.**

La resistenza al taglio sulle aree di contatto tra le particelle è proporzionale alla forza che le spinge l'una contro l'altra e la possiamo pertanto considerare una **forza di attrito**.

Sui punti di contatto tra le particelle per **alcuni tipi di terra** (argille prevalentemente) si sviluppano delle **forze di adesione** che rientrano tra le azioni reciproche tra le particelle e quindi contribuiscono alla formazione della resistenza al taglio delle terre.

Coulomb propose, per i **mezzi granulari**, la **relazione tra la tensione di taglio e la tensione normale**: $\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \phi$ nella quale $\operatorname{tg} \phi$ esprime il coefficiente di attrito.

Per i **mezzi coerenti** Coulomb propose che ad equilibrare il taglio oltre all'attrito figurasse **anche una resistenza detta coesione** che si manifesta anche a **tensione normale nulla**. La relazione ora vista si riscrive nella forma: $\tau = c + \sigma \cdot \operatorname{tg} \phi$

La svolta decisiva nello studio della resistenza al taglio si ebbe però solamente quando si scoprì che la differenza fondamentale tra le caratteristiche di resistenza al taglio e di comportamento delle sabbie e delle argille dipendeva non tanto dalle diverse proprietà d'attrito delle particelle quanto dall'enorme differenza di permeabilità.

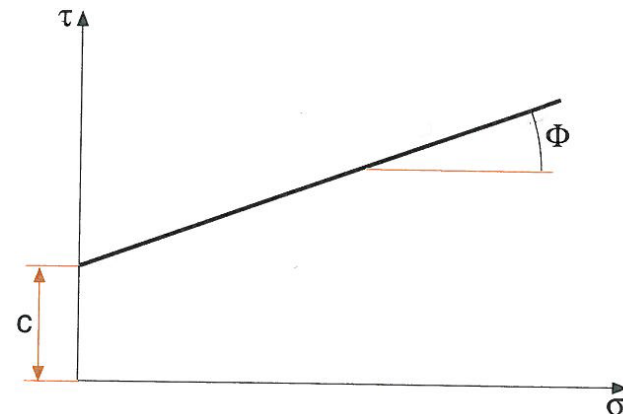
La chiarificazione di questo fatto ebbe inizio con la scoperta da parte di Terzaghi del principio della pressione effettiva e con la modifica della relazione di Coulomb nella forma:

$$\tau = c' + (\sigma - u) \cdot \operatorname{tg} \phi' = c' + \sigma' \cdot \operatorname{tg} \phi'$$

nella quale **c'** e **Φ'** sono espressi in termini di pressioni effettive.

In questa nuova forma la relazione di Coulomb -Terzaghi ha assunto validità per una grande varietà di materiali e di condizioni di carico.

Questa situazione di rottura è rappresentata nel piano τ, σ' da una retta i cui punti indicano stati tensionali a rottura; i punti al di sotto della retta rappresentano situazioni di parziale sicurezza rispetto alla rottura e quelli al di sopra situazioni irrealizzabili.



RAPPRESENTAZIONE DI UN SISTEMA PIANO DI TENSIONI

Se per un punto O all'interno di un corpo si considerano tutti i possibili elementi superficiali infinitesimi diversamente orientati, ossia appartenenti alla stella di piani che ha centro in O , le tensioni su di essi (cioè la tensione risultante e le componenti normale σ e tangenziale τ all'elemento superficiale considerato) variano generalmente da elemento a elemento.

In particolare esistono tre piani, fra loro ortogonali, su cui agiscono esclusivamente tensioni normali. Questi tre piani sono detti **principali**, e le tensioni che agiscono su di essi sono dette **tensioni principali**.

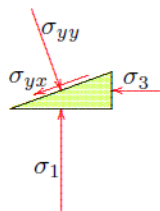
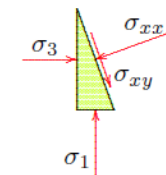
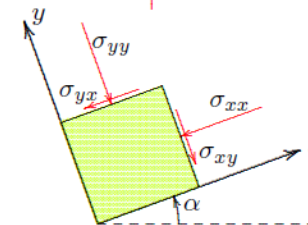
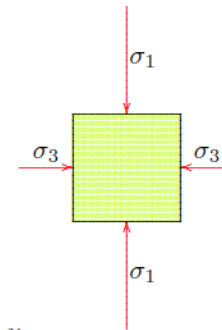
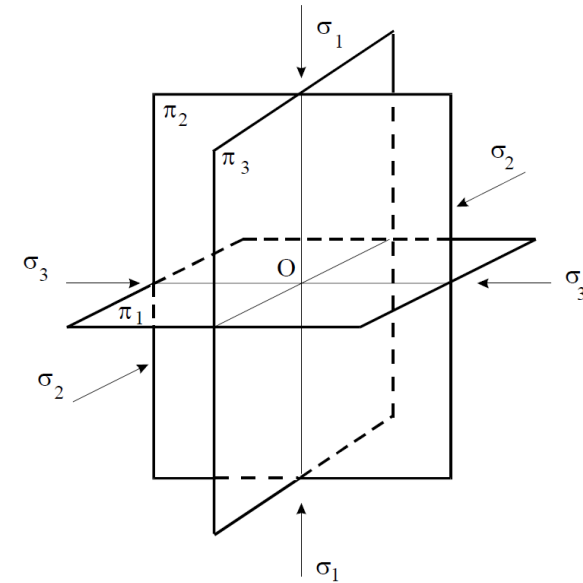
Generalmente, la tensione principale maggiore (che agisce sul piano principale maggiore π_1) è indicata con σ_1 , la tensione principale intermedia (che agisce sul piano principale intermedio π_2) è indicata con σ_2 , la tensione principale minore (che agisce sul piano principale minore π_3) è indicata con σ_3 .

In particolari condizioni di simmetria due, o anche tutte e tre, le tensioni principali possono assumere lo stesso valore.

Il caso in cui le tre tensioni principali hanno eguale valore è detto di **tensione isotropa**: in condizioni di tensione isotropa tutti i piani della stella sono principali e la tensione (isotropa) è eguale in tutte le direzioni.

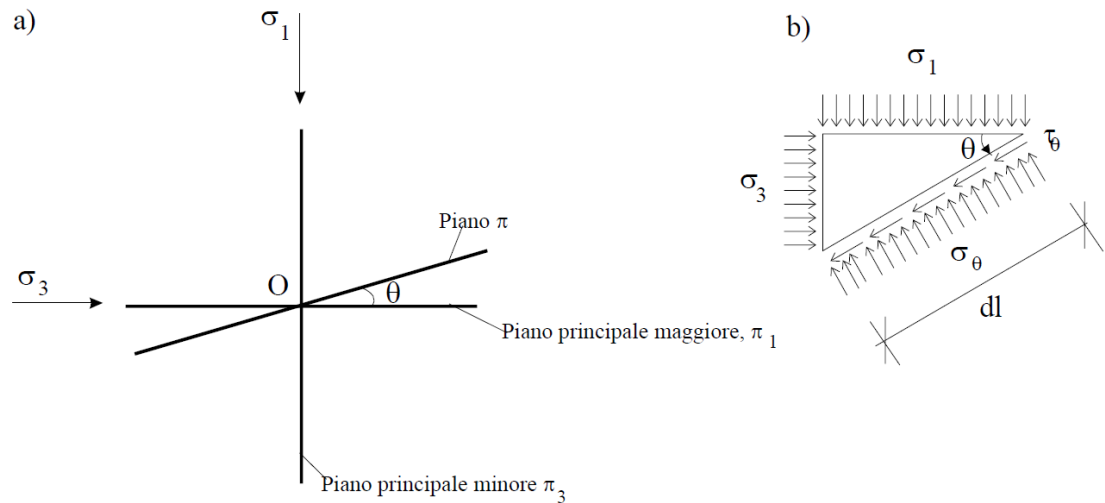
Quando **due delle tre tensioni principali sono uguali** lo stato tensionale si definisce **assialsimmetrico** e tutti i piani della stella appartenenti al fascio che ha per asse la direzione della tensione principale diversa dalle altre due, sono piani principali (e le relative tensioni sono uguali).

Poiché spesso gli stati tensionali critici per i terreni interessano piani normali al piano principale intermedio, ovvero piani appartenenti al fascio avente per asse la direzione della tensione principale intermedia σ_2 , è possibile ignorare il valore e gli effetti della tensione principale intermedia σ_2 e riferirsi ad un **sistema piano di tensioni**.



Le tensioni sui piani del fascio avente per asse la direzione della tensione principale intermedia variano al variare dell'inclinazione del piano.

In Figura sono disegnate le tracce dei due piani principali maggiore π_1 e minore π_3 , e di un **generico piano π del fascio** avente inclinazione θ rispetto alla direzione del piano principale maggiore.



Si consideri l'equilibrio di un elemento prismatico di spessore unitario (problema piano) e forma triangolare, con i lati di dimensioni infinitesime (per rimanere nell'intorno del punto considerato), paralleli ai due piani principali e al piano π (Figura di dx).

Le condizioni di equilibrio alla traslazione in direzione orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned} \sigma_3 \cdot dl \cdot \sin \theta - \sigma_\theta \cdot dl \cdot \sin \theta - \tau_\theta \cdot dl \cdot \cos \theta &= 0 \\ \sigma_1 \cdot dl \cdot \cos \theta - \sigma_\theta \cdot dl \cdot \cos \theta + \tau_\theta \cdot dl \cdot \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

impongono che le tensioni tangenziale τ_θ e normale σ_θ sul piano π valgano:

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Queste sono le tensioni indotte dalle due tensioni principali, σ_1 e σ_3 , su un piano inclinato di θ rispetto a π_1

In un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O e assi X e Y, sul quale vengono riportate lungo l'asse X le tensioni normali, σ , e lungo l'asse Y le tensioni tangenziali, τ (**piano di Mohr**), le equazioni

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos^2 \theta$$

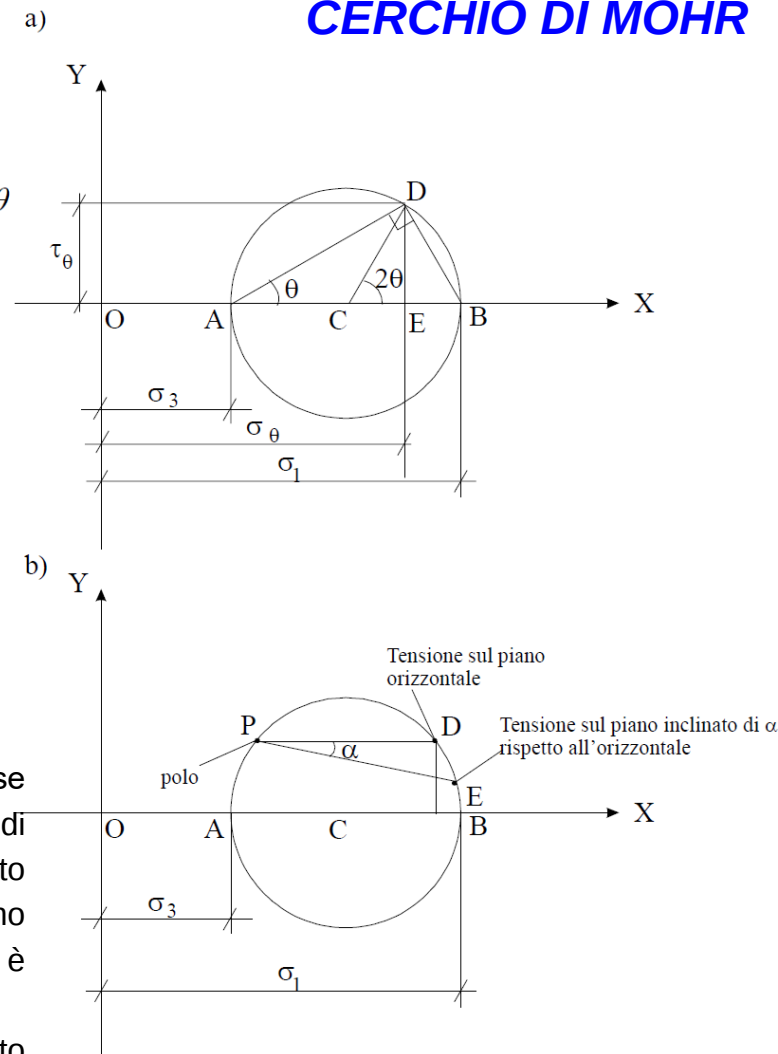
rappresentano un cerchio di raggio $R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ e centro $C[(\sigma_1 + \sigma_3)/2; 0]$, detto **cerchio di Mohr**, che **è il luogo delle condizioni di tensione di tutti i piani del fascio**.

Per disegnare il cerchio, con riferimento alla Figura a), occorre prima posizionare i punti A e B sull'asse X, in modo tale che i segmenti OA ed OB siano proporzionali, nella scala prescelta, rispettivamente alle tensioni principali minore, σ_3 , e maggiore, σ_1 , e poi tracciare il cerchio di diametro AB. Come detto, **tale cerchio è il luogo degli stati di tensione di tutti i piani del fascio**.

Sul cerchio di Mohr è utile poi definire il concetto di **polo o origine dei piani**, come **il punto tale che qualunque retta uscente da esso interseca il cerchio in un punto le cui coordinate rappresentano lo stato tensionale agente sul piano che ha per traccia la retta considerata**.

Se il **piano principale maggiore** (su cui agisce la σ_1) è perpendicolare all'asse Y, il polo è rappresentato dal punto $A(\sigma_3, 0)$, cioè un piano del fascio inclinato di un angolo θ rispetto al piano principale maggiore interseca il cerchio in un punto D, le cui coordinate rappresentano le tensioni normale e tangenziale sul piano considerato. Viceversa, se il **piano principale minore** (su cui agisce la σ_3) è perpendicolare all'asse Y, il polo è rappresentato dal punto $B(\sigma_1, 0)$.

Se per individuare l'orientazione dei piani del fascio assumiamo come riferimento i piani verticale ed orizzontale, non necessariamente coincidenti con i piani principali, il polo, P, è **individuato dall'intersezione col cerchio di Mohr della retta orizzontale condotta dal punto, D, che ha per coordinate la tensione normale e tangenziale sul piano orizzontale**; un generico piano del fascio inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale (Figura b), interseca il cerchio di Mohr in un punto, E, le cui coordinate rappresentano le tensioni normale e tangenziale sul piano considerato.



Con riferimento alla Figura (a), si può dimostrare che il cerchio di Mohr è rappresentato dalle equazioni:

$$\tau_{\theta} = DE = DC \cdot \sin 2\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\theta$$

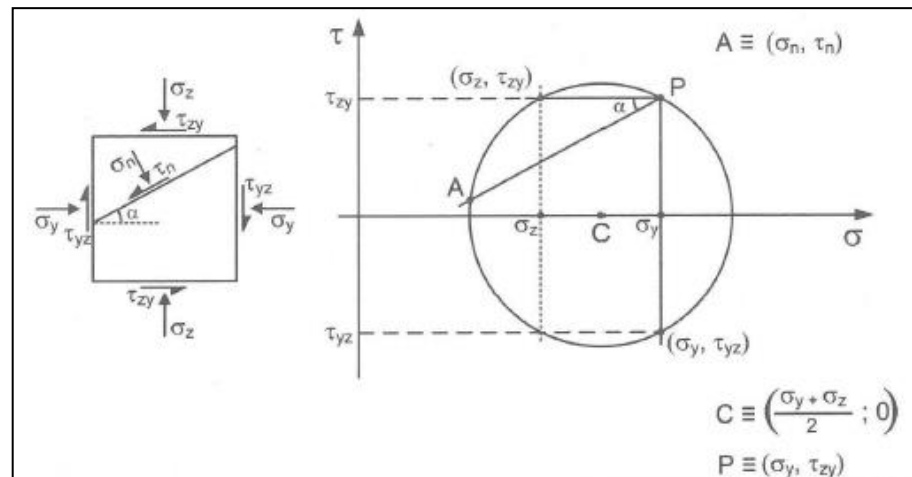
$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} &= OE = OA + AE = \sigma_3 + AD \cdot \cos \theta = \sigma_3 + AB \cdot \cos^2 \theta = \\ &= \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos^2 \theta \end{aligned}$$

La rappresentazione con il *cerchio di Mohr* permette quindi di analizzare lo stato di tensione in un punto ed associare alle giaciture di piani lo stato di tensione ad essi relativo.

Si ricorre frequentemente a questa costruzione considerando, quali tensioni principali, le tensioni verticale ed orizzontale agenti su un generico elemento di terreno, ad una profondità z a partire dalla superficie del piano di campagna. In tale modo sarà possibile definire le condizioni tensionali iniziali e l'evoluzione delle stesse in seguito a modifiche imposte.

Un elemento sottoposto a un generico stato di tensione: in accordo con le convenzioni adottate, la figura riporta il cerchio di Mohr corrispondente.

Tracciando dal punto P, *polo della rappresentazione* di coordinate (σ_y, τ_{zy}) , una retta parallela alla giacitura individuata in figura dall'angolo α , si definiscono i valori delle tensioni normali e tangenziali (σ_n, τ_n) , agenti sul piano avente tale giacitura.



Cerchio di Mohr riferito all'elemento sottoposto alle tensioni principali σ_1 e σ_3 : in questo caso il polo della rappresentazione ha coordinate $P = (\sigma_3, 0)$; tracciando da esso la retta inclinata di α , si ottiene lo stato di tensione agente sul piano in esame.

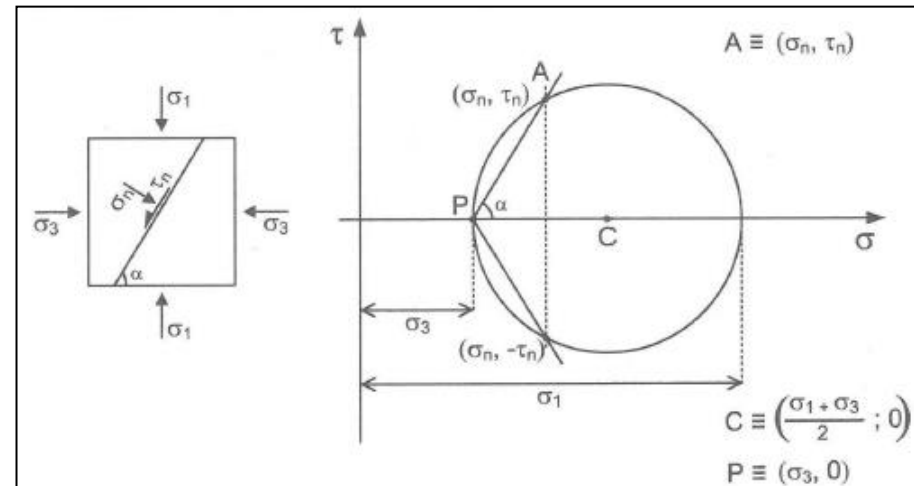


FIGURA 2.13 Origine dei piani.

- le componenti di tensione agenti su due piani mutuamente ortogonali possono essere interpretate come coordinate di due punti sul piano (σ, τ) , definito *piano di Mohr*;
- nel rappresentare graficamente tali punti, nella meccanica delle terre si assumono come positive le tensioni normali di *compressione* e le tensioni tangenziali che suggeriscono una *rotazione antioraria* (ad esempio, in figura 2.13 le componenti τ_{yx} , agenti sui piani orizzontali sono positive perché suggeriscono una rotazione antioraria, mentre le componenti τ_{xy} sono negative);
- noti tali punti, è possibile tracciare il *cerchio delle tensioni*, avente centro nel punto di ascissa pari a

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

e raggio pari a

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

- la definizione di **origine dei piani** permette infine di determinare lo stato di tensione agente su qualsiasi altro piano. Si definisce come origine dei piani il punto P che gode della seguente proprietà: conducendo per esso la parallela alla giacitura di un piano generico, il punto di intersezione con il cerchio ha come coordinate le componenti di tensioni agenti sul piano in esame.

È importante osservare che la convenzione di segno appena introdotta vale solo e unicamente per la rappresentazione grafica. Quando invece si utilizzano le equazioni di equilibrio (richiamate in figura 2.14), la convenzione è la seguente:

assunte come positive le tensioni normali di compressione, le **tensioni tangenziali** sono **positive** se, sulle facce negative, sono rivolte nella direzione positiva dell'asse al quale sono parallele.

Le facce negative sono quelle più vicino all'origine, in quanto si definisce **positiva** la faccia dell'elemento per la quale la normale uscente ha il verso positivo dell'asse a essa parallelo.

È appena il caso di notare che, nella meccanica delle strutture, si usa la convenzione inversa: sono positive le trazioni e le tensioni tangenziali che hanno verso positivo sulla faccia positiva, sicché non c'è dubbio che le diverse convenzioni possano ingenerare un po' di confusione. Per questo motivo, allo scopo di acquisire familiarità

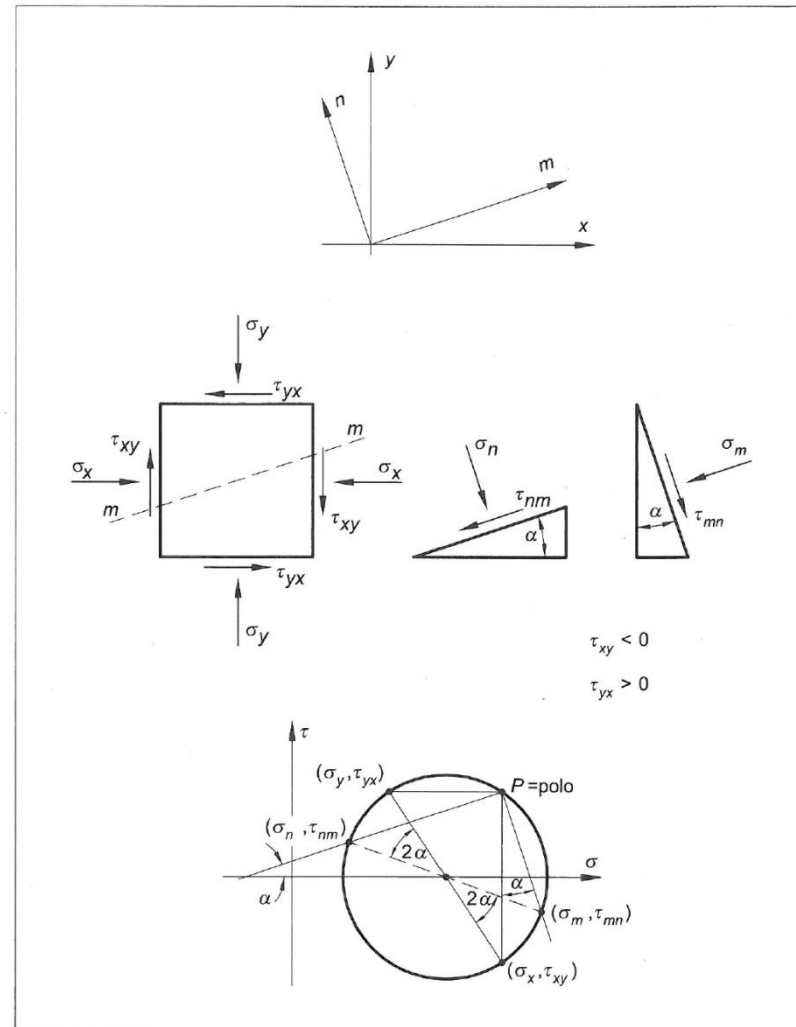
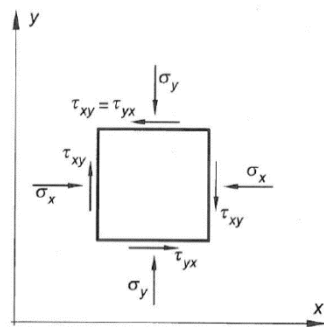


FIGURA 2.14 Relazioni tra componenti di tensione e giaciture.



$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{mn} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

CRITERIO DI ROTTURA DI MOHR-COULOMB

In base al principio delle tensioni efficaci

“ogni effetto misurabile di una variazione dello stato di tensione, come la compressione, la distorsione e la variazione di resistenza al taglio è attribuibile esclusivamente a variazioni delle tensioni efficaci”.

Dunque la **resistenza del terreno**, che **a causa della natura particellare del mezzo**, è una **resistenza al taglio**, deve essere espressa da una relazione (**criterio di rottura**) del tipo: $\tau = f(\sigma')$. Il più semplice ed utilizzato criterio di rottura per i terreni, è il **criterio di Mohr-Coulomb**:

$$\tau_f = c' + (\sigma - u) \cdot \tan \varphi' = c' + \sigma'_{n,f} \cdot \tan \varphi' \quad \text{per } \sigma' > 0$$

in base al quale la **tensione tangenziale limite di rottura in un generico punto P di una superficie di scorrimento potenziale interna al terreno è dato dalla somma di due termini**:

il primo, detto **coesione** c' , è **indipendente dalla tensione efficace normale** alla superficie agente in quel punto, ed il secondo è ad essa proporzionale attraverso un coefficiente d'attrito $\tan \varphi'$ in cui l'angolo φ' è detto **angolo di resistenza al taglio**.

Nel piano τ - σ' di Mohr l'equazione ora vista rappresenta una retta, detta **retta inviluppo di rottura**, **che separa gli stati tensionali possibili da quelli privi di significato fisico in quanto incompatibili con la resistenza del materiale**.

Nel piano τ - σ' , lo **stato di tensione** (che per semplicità di esposizione considereremo piano) nel punto D, **corrispondente alla rottura**, sarà **rappresentato da un cerchio di Mohr tangente all'inviluppo di rottura**. Un cerchio di Mohr tutto al di sotto della retta inviluppo di rottura indica invece che la **condizione di rottura non è raggiunta su nessuno dei piani passanti per il punto considerato**, mentre **non sono fisicamente possibili le situazioni in cui il cerchio di Mohr interseca l'inviluppo di rottura**.

Si osservi che in base alle proprietà dei cerchi di Mohr risulta nota la rotazione del piano di rottura per P (ovvero del piano su cui agiscono la tensione efficace normale $\sigma'_{n,f}$ e la tensione tangenziale τ_f) rispetto ai piani principali per P (ovvero rispetto a quei piani su cui agiscono solo tensioni normali e le tensioni tangenziali sono zero).

In particolare l'angolo fra il piano di rottura ed il piano su cui agisce la tensione principale maggiore $\sigma'_{1,f}$ è pari a $(\pi/4 + \varphi'/2)$.

Si considerino i valori degli angoli del triangolo FDC poiché la somma degli angoli di un triangolo è π , ne risulta che: **$\theta_f = \varphi'/2 + \pi/4$**

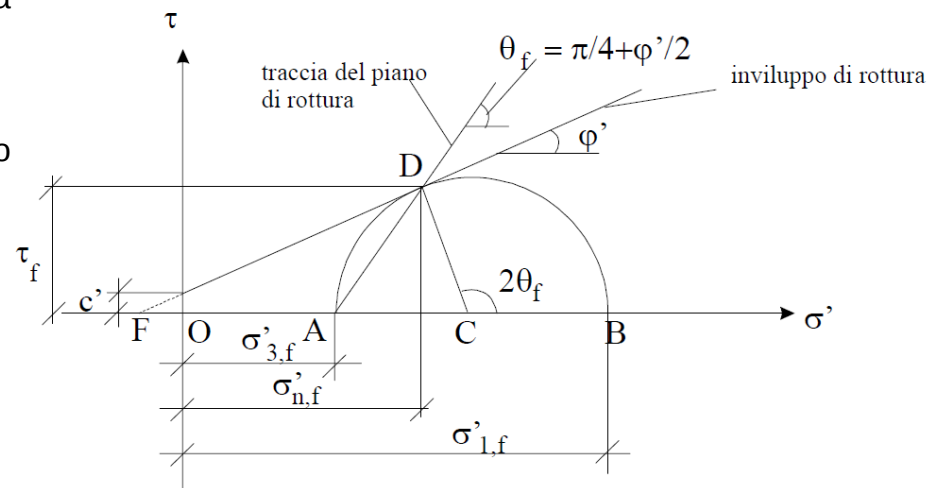
La **tensione τ_f non è il valore massimo della tensione tangenziale nel punto P**, la quale è invece pari al raggio del cerchio di Mohr:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma'_1 - \sigma'_3)$$

ed è associata ad una tensione normale che è pari al valore medio delle tensioni principali maggiore e minore

$$\sigma'_m = \frac{1}{2} \cdot (\sigma'_1 + \sigma'_3)$$

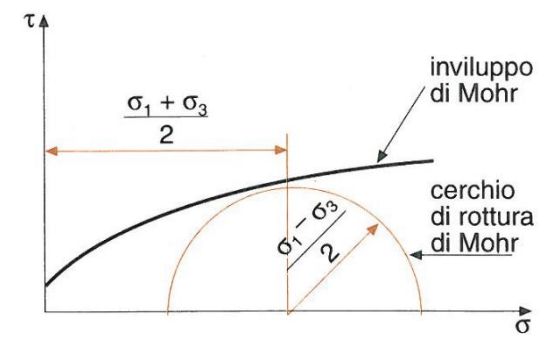
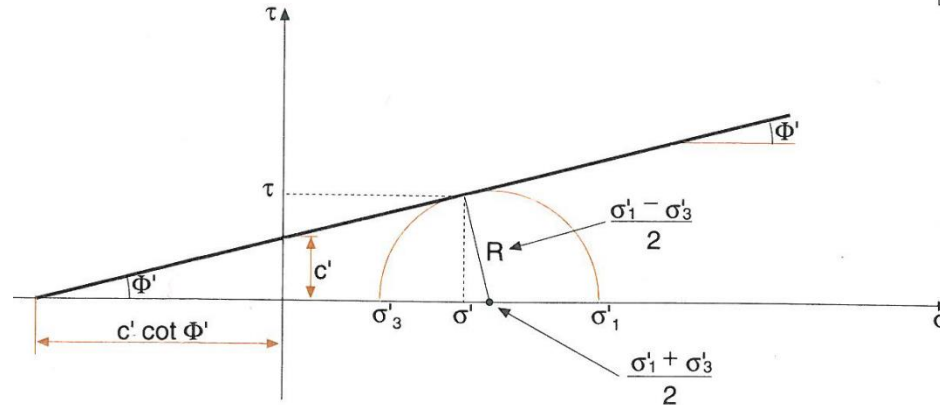
ed agisce su un piano ruotato di $\pi/4$ rispetto al piano su cui agisce la tensione principale maggiore $\sigma'_{1,f}$ e quindi di $\varphi'/2$ rispetto al piano di rottura.



Il criterio di Coulomb – Mohr, $\tau = f(\sigma)$, indica che la rottura accade quando la tensione di taglio sul piano di rottura è una funzione della tensione normale a quel piano

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)$$

La condizione di rottura perciò può essere definita in termini di curva involuppo di Mohr, cioè di curva tangente ai cerchi di rottura.



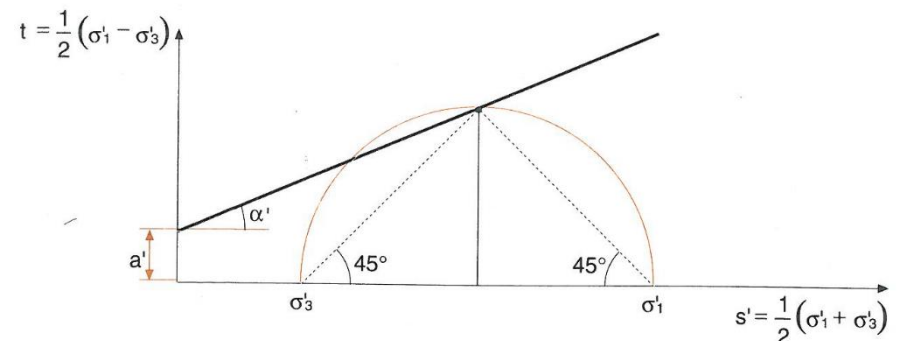
La legge di Mohr-Coulomb può essere rappresentata in termini di tensioni principali effettive:

$$\frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) = \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + c' \cotg \Phi'\right) \sen \Phi' \quad \text{e si può anche scrivere:} \quad \sigma'_1 = \left(\frac{1 + \sen \Phi'}{1 - \sen \Phi'}\right) \sigma'_3 + 2c' \left(\frac{\cos \Phi'}{1 - \sen \Phi'}\right) = \text{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\Phi'}{2}\right) \sigma'_3 + 2c' \text{tg}\left(45^\circ + \frac{\Phi'}{2}\right)$$

Se si vuole **invece** rappresentare la **situazione a rottura in un piano s'-t** con $t = 1/2(\sigma'_1 - \sigma'_3)$ e $s' = 1/2(\sigma'_1 + \sigma'_3)$

l'involuppo a rottura diventa la retta che **congiunge il vertice dei cerchi a rottura** (nel diagramma $\tau - \sigma'$ la retta era la tangente ai cerchi) la cui equazione è: $\tau = a' + \sigma' \text{tg} \alpha'$ dove a' e α' sono i parametri a rottura legati a c' e Φ' con le relazioni:

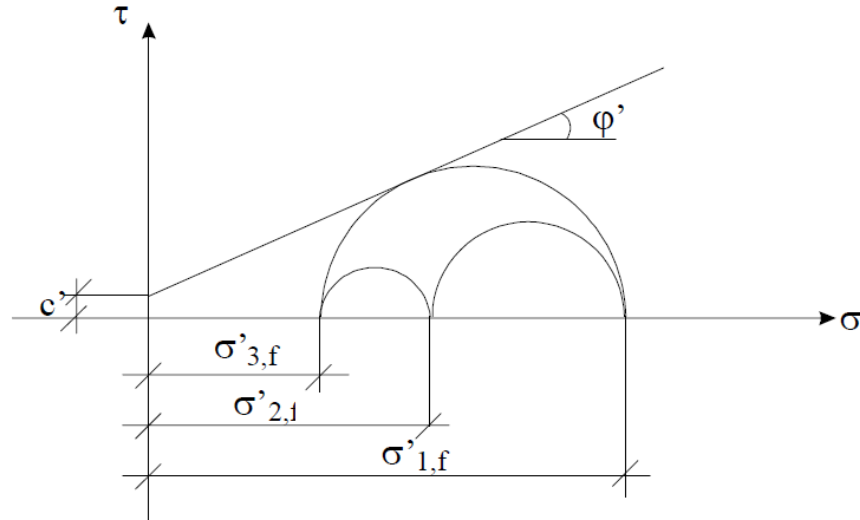
$$a' = c' \cos \Phi' \quad \text{tg} \alpha' = \sen \Phi'$$



OSSERVAZIONI SULL'INVILUPPO DI ROTTURA

In relazione a quanto esposto nei paragrafi precedenti è opportuno evidenziare che:

- il criterio di rottura di Mohr - Coulomb non dipende dalla tensione principale intermedia; si osservi la rappresentazione dello stato tensionale in un punto in condizioni di rottura: essa dipende dai valori di $\sigma'_{1,f}$ e di $\sigma'_{3,f}$, che definiscono dimensioni e posizione del cerchio di Mohr tangente alla retta di inviluppo di rottura, ed è indipendente dal valore di $\sigma'_{2,f}$;



- i parametri di resistenza al taglio c' e ϕ' **non sono** caratteristiche fisiche del terreno, ma **sono funzione di molti fattori**, fra cui: storia tensionale, indice dei vuoti, livello di tensione e di deformazione, tipo di struttura, composizione granulometrica, temperatura etc..
- l'inviluppo a rottura può presentare $c' = 0$;
- l'inviluppo di rottura reale non è necessariamente una retta; spesso tale approssimazione è accettabile solo in un campo limitato di tensioni. Pertanto nella sperimentazione di laboratorio occorre indagare sul **campo di tensioni prossimo allo stato tensionale in sito**.

CONDIZIONI DI STATO INIZIALI - TENSIONI GEOSTATICHE

La natura particellare dei terreni si traduce in un comportamento anelastico e anisotropo, dipendente quindi non solo dall'incremento di sforzo ma anche dalla storia e dal percorso di carico.

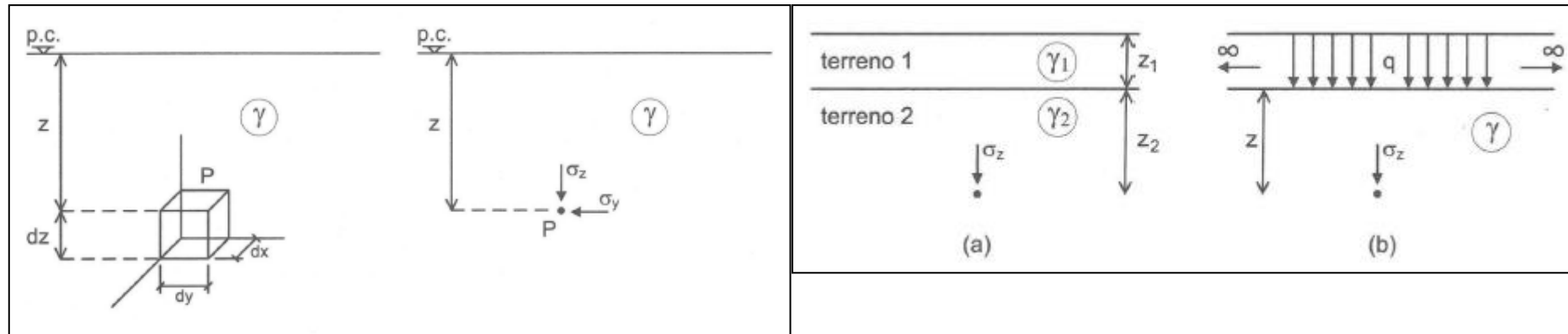
Lo stato tensionale esistente in un punto del terreno dipende:

dal peso proprio del terreno, dalla sua storia tensionale, dalle condizioni di falda e dai carichi esterni ad esso applicati.

È pertanto opportuno, come primo passo di ogni analisi, definire le **condizioni iniziali**, ossia identificare in ogni punto le **componenti di tensione dovute al peso proprio del terreno**, note come **tensioni geostatiche (litostatiche)**.

La conoscenza di queste tensioni è importante anche per valutare adeguatamente i dati che si raccolgono con le prove di laboratorio e con le prove in situ.

Un caso semplice e frequente è quello di terreno delimitato da una superficie orizzontale e con caratteristiche uniformi in direzione orizzontale. In **questa situazione i piani verticali e orizzontali sono piani principali e quindi su questi piani non si hanno tensioni tangenziali**.



La **tensione verticale totale** alla profondità z è data, nel caso di terreno omogeneo con peso di volume γ , dalla relazione molto semplice: $\sigma_{v0} = \gamma z$

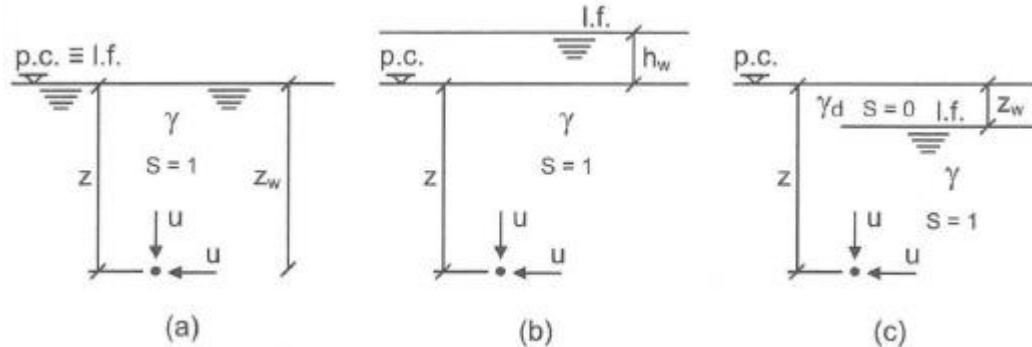
Nel caso di **terreno stratificato** da: $\sigma_{v0} = \sum \gamma_i z_i$

Nel caso della presenza di un **sovraccarico uniformemente distribuito di intensità** $q = \gamma_1 z_1$, la tensione verticale agente è la somma della quota parte geostatica più quella indotta dal sovraccarico: $\sigma_{v0} = \sum \gamma_i z_i + q$

TENSIONI TOTALI

Fin qui si è considerato il terreno soggetto al solo peso proprio ed, eventualmente, ad un sovraccarico di intensità nota. Non si è considerata la presenza di acqua libera nei pori: il grado di saturazione S è stato considerato quindi pari a zero.

In natura, spesso, il terreno è sede di falde acquifere e si può trovare, quindi, in condizione di completa ($S = 1$) o parziale saturazione ($S = 0 \div 1$). Si consideri per semplicità, il solo caso $S=1$.



$$\gamma = \gamma_d + S \cdot n \cdot \gamma_W = \gamma_d + \frac{G_S \cdot w}{1 + e} \gamma_W$$

In condizioni di equilibrio, alla profondità z , la pressione dell'acqua presente nei pori, detta *interstiziale*, è proporzionale all'altezza della «colonna» d'acqua sopra il punto in esame. La **pressione interstiziale** è indicata in Meccanica delle Terre con la lettera **u** e, per le tre situazioni illustrate, vale rispettivamente da sx a dx:

$$u = \gamma_w \cdot z_w$$

$$u = \gamma_w \cdot (z + h_w)$$

$$u = \gamma_w \cdot (z - z_w)$$

La pressione idrostatica u è isotropa e, a partire dalla superficie piezometrica ($u = 0$), ha distribuzione triangolare, crescente con la profondità, con gradiente γ_w .

Le tensioni verticali (σ_z) possono essere calcolate, considerando:

$$\gamma = \gamma_d \quad \text{per } S=0$$

$$\gamma = \gamma_d + n \gamma_w = \gamma_{sat} \quad \text{per } S=1$$

Per le tre condizioni in esame si avrà quindi rispettivamente:

$$\sigma_z = \gamma \cdot z = \gamma_{sat} \cdot z$$

$$\sigma_z = \gamma_{sat} \cdot z + \gamma_w \cdot h_w$$

$$\sigma_z = \gamma_d \cdot z_w + \gamma_{sat} \cdot (z - z_w)$$

Poiché le **tensioni (σ_z) valutate in questo modo dipendono dal peso di volume totale del terreno** (con o senza presenza di acqua al suo interno, caso per caso) vengono denominate **tensioni totali**.

Il terreno è un materiale multifase costituito da particelle e da vuoti e l'acqua nei vuoti può essere in pressione.

Per capire il comportamento del terreno è stato pertanto necessario stabilire una legge di interazione tra le varie fasi.

La Meccanica delle terre fa riferimento a quanto proposto da Terzaghi attraverso il **principio delle tensioni efficaci / effettive**.

Se consideriamo un **elemento di terreno**, le **forze** che agiscono in esso possono essere divise in **due parti**:

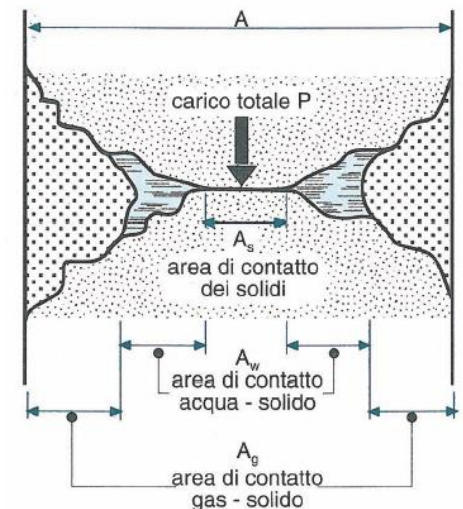
1. quelle che sono **trasmesse direttamente da grano a grano** (dette **pressioni intergranulari o effettive o efficaci**) e
2. quelle che **agiscono attraverso il fluido che riempie i vuoti** (**pressioni dell'acqua dei pori o pressioni neutre**).

La pressione efficace su di un piano è prodotta dai contatti tra grano e grano (ma viene calcolata come pressione di contatto nominale P/A). La pressione efficace produce una resistenza d'attrito tra le particelle di terreno, che è una parte della resistenza del terreno, e produce gli sforzi necessari a far scorrere le particelle conferendo loro una struttura più compatta (fenomeno detto cedimento). Quando il terreno si trova al di sotto del livello della falda acquifera, esso subisce una spinta verso l'alto secondo il principio di Archimede. Tale effetto di sostentamento si calcola facilmente poiché è lo stesso per qualunque corpo immerso; la spinta verso l'alto si calcola come

$$P_{\text{verso l'alto}} = \gamma_w z_w A$$

Analogamente, quando il corpo è sott'acqua a una profondità z'_w , l'acqua esercita sulla sua sommità una spinta verso il basso calcolabile esattamente come sopra. Poiché di solito si fa riferimento a un'area unitaria ($A = 1$), si tende a usare pressioni e non forze, cosicché si ha

$$\sigma_{\text{verso l'alto}} = \gamma_w z_w$$



La valutazione dello stato di tensione totale in un punto all'interno del terreno avviene assumendo lo schema di mezzo continuo solido.

Analogamente la pressione dell'acqua libera è valutabile ponendo la stessa ipotesi per il fluido interstiziale.

Il terreno in condizioni di completa saturazione è quindi trattato come un mezzo continuo ideale, formato da due continui (uno solido e uno fluido) che occupano lo stesso volume dello spazio e che sono immaginati agire in parallelo.

Non si deve comunque trascurare il fatto che la parte solida del terreno è un insieme di particelle indipendenti che si scambiano forze di volume (e di superficie) e che le interazioni tra tali elementi indipendenti e tra questi ed il fluido interstiziale condizionano il comportamento meccanico di tale materiale.

Si è quindi ricercata una **legge di interazione per tale mezzo continuo ideale** tenendo inoltre presente che nel continuo:

- in ogni punto si definisce uno stato tensionale individuato da un tensore degli sforzi di componenti σ_{ij} , legato alle forze esterne dalle relazioni di equilibrio;
- in ogni punto si definisce uno stato di deformazione individuato dal tensore delle deformazioni di componenti ϵ_{ij} , legato al campo di spostamento dalle condizioni di congruenza (compatibilità).

Il principio «degli sforzi efficaci», introdotto da Terzaghi, costituisce questa legge di interazione.

Il principio degli sforzi efficaci stabilisce che nel terreno saturo, in relazione all'equilibrio interno, gli sforzi totali agenti si ripartiscono in parte nello scheletro solido e in parte nel fluido.

L'acqua interstiziale sopporta solo tensioni normali isotrope e non tensioni tangenziali; di conseguenza il principio degli sforzi efficaci si esplicita nella seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

o in altri termini:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}u$$

in cui le tensioni σ'_{ij} sono dette **tensioni efficaci** e sono convenzionalmente contrassegnate con l'apice.

«In ogni elemento all'interno di un volume di terreno le tensioni possono essere valutate a partire *dalla conoscenza delle tensioni totali principali* ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) agenti su quell'elemento. Se gli spazi intergranulari sono saturati con acqua, avente pressione u , le tensioni totali possono scomporsi in due contributi. Uno di essi agisce *sull'acqua e sullo scheletro solido*, in ogni direzione e con uguale intensità, pari a u ed è detto *pressione neutra* (o *pressione interstiziale*).

La differenza $\sigma'_1 = \sigma_1 - u, \sigma'_2 = \sigma_2 - u, \sigma'_3 = \sigma_3 - u$, rappresenta il contributo agente *unicamente sulla frazione solida del terreno*, in eccedenza alla pressione interstiziale. Questa frazione delle tensioni totali verrà chiamata «*tensione efficace*».

La pressione interstiziale isotropa è detta *pressione neutra* in quanto è solo la componente *efficace* che, se varia, condiziona la risposta meccanica del terreno (ma le variazioni di tensione efficace sono legate a possibili variazioni delle pressioni neutre).

«Tutti gli effetti misurabili dovuti a un cambio dello stato di tensione, quali una compressione, una distorsione e una variazione della resistenza al taglio sono esclusivamente imputabili a cambiamenti delle tensioni efficaci $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$. Conseguentemente, *qualunque indagine volta allo studio della stabilità di un terreno saturo necessita la conoscenza sia delle tensioni totali, sia di quelle neutre*» (Terzaghi)

Nel piano di Mohr è possibile rappresentare cerchi in termini di sforzi totali ed efficaci ed essi sono traslati del valore delle pressioni neutre u (nel caso in esame assunte positive). Poiché $\sigma'_1 = \sigma_1 - u$ e $\sigma'_3 = \sigma_3 - u$, i cerchi hanno lo stesso diametro. I punti A ed A' si riferiscono, rispettivamente, alle tensioni normali e tangenziali totali ed efficaci nel piano inclinato di α : è chiaro che $\tau = \tau'$ visto il significato di sforzo efficace e pressione neutra (l'acqua non sopporta sforzi di taglio)

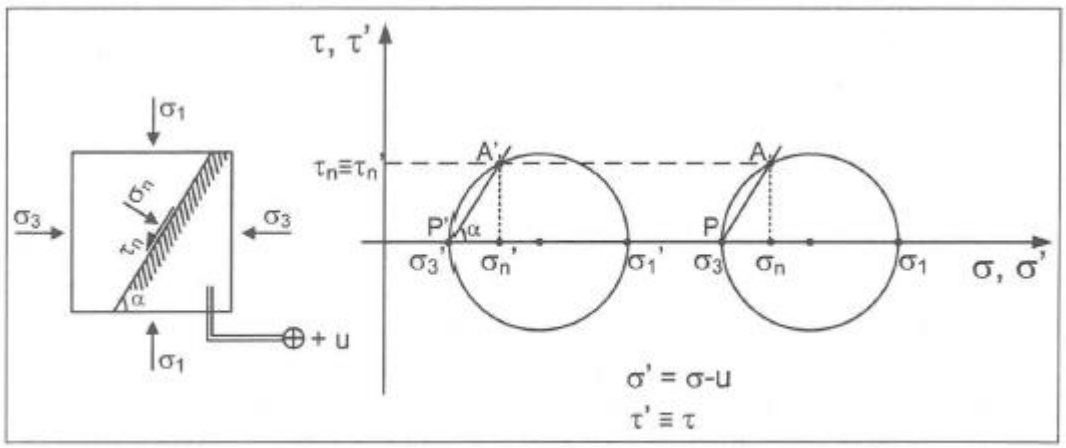
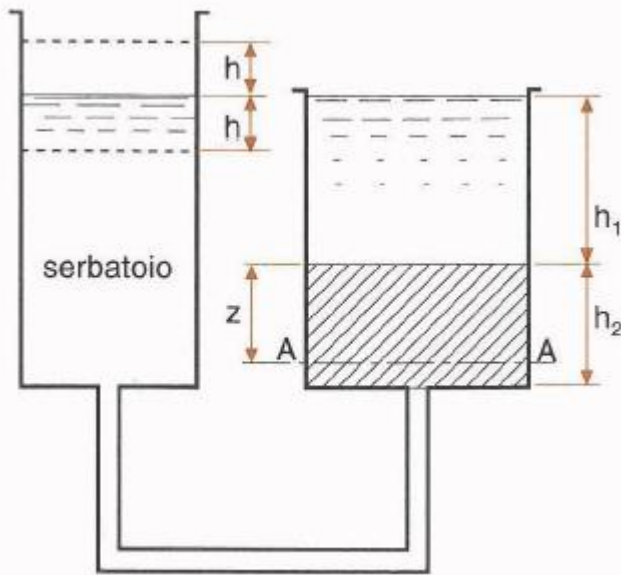


Fig. 3.11 Cerchi di Mohr in tensioni totali ed efficaci



Considerando lo schema a lato: si ha un recipiente riempito per l'altezza h_2 con materiale granulare e per l'altezza $(h_2 + h_1)$ con acqua.

Al fondo del recipiente è attaccato un tubo collegato con un serbatoio nel quale l'acqua è allo stesso livello del recipiente con il materiale granulare; non vi è quindi alcun movimento dell'acqua.

Sulla sezione AA alla profondità $(h_1 + z)$ la pressione verticale σ è data da:

$$\sigma = h_1 \gamma_w + z \gamma_{sat}$$

dove γ_w è il peso unitario dell'acqua e γ_{sat} il peso di volume del terreno saturo.

Poiché σ dipende dal peso di tutto il materiale sovrastante (acqua + terra) viene chiamata **pressione totale** e Terzaghi ha mostrato che è legata alla **pressione effettiva/efficace** σ' ed alla **pressione neutrale** u dalla relazione:

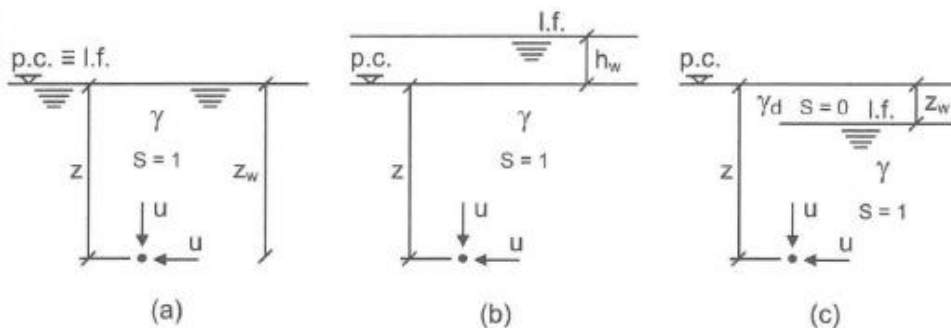
$$\sigma = \sigma' + u$$

La pressione effettiva /efficace è allora: $\sigma' = \sigma - u = h_1 \gamma_w + z \gamma_{sat} - (h_1 + z) \gamma_w = z(\gamma_{sat} - \gamma_w)$

Il termine $(\gamma_{sat} - \gamma_w)$ è chiamato peso di volume del terreno immerso e indicato con γ' . Si può perciò scrivere: $\sigma' = z \gamma'$

In conclusione: l'importanza del principio delle tensioni efficaci risiede nel fatto che il comportamento del terreno (compressione, distorsione, resistenza al taglio) dipende dalla combinazione dei valori delle tensioni totali e neutri e non dai loro singoli valori, cioè dipende dalle **variazioni** di $\sigma' = \sigma - u$.

Il principio della pressione effettiva riguarda sia i terreni a grana grossa che quelli a grana fine.



$$\sigma'_z = \sigma_z - u = (\gamma_{sat} - \gamma_w)z = \gamma' z \quad (3.19 a)$$

$$\sigma'_z = \sigma_z - u = (\gamma_{sat} - \gamma_w)z = \gamma' z \quad (3.19 b)$$

$$\sigma'_z = \sigma_z - u = \gamma_d z_w + (\gamma_{sat} - \gamma_w)(z - z_w) = \gamma_d z_w + \gamma'(z - z_w) \quad (3.19 c)$$

avendo introdotto il peso di unità di volume del terreno alleggerito:

$$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w \quad (3.20)$$

- In un deposito di terreno saturo completamente immerso, il valore delle tensioni efficaci (a qualsiasi profondità) è indipendente dall'altezza della colonna d'acqua sovrastante il piano di campagna (casi a e b);
- lo stesso non si applica nel caso di terreno parzialmente immerso (caso c);
- **le tensioni verticali efficaci nella zona immersa sono calcolabili direttamente utilizzando il peso di volume alleggerito, o immerso, γ'** ;
- è immediato verificare che, in assenza d'acqua, le tensioni efficaci coincidono con quelle totali e che $\gamma' = \gamma'_d$

- Terzaghi non attribuisce alcun significato fisico alle tensioni principali efficaci, ma le definisce semplicemente come differenza tra tensioni principali totali e pressione interstiziale;
- le **tensioni principali efficaci non sono dunque direttamente misurabili**, ma possono essere desunte solo attraverso la contemporanea conoscenza delle tensioni principali totali e della pressione interstiziale;
- **il principio delle tensioni efficaci è una relazione di carattere empirico (Terzaghi precisa infatti che “Ogni effetto misurabile.....), che è stato finora sempre confermato all'evidenza sperimentale.**

In definitiva per studiare il comportamento meccanico di un terreno saturo ci si riferisce a due mezzi continui sovrapposti e mutuamente interagenti, e si definiscono in ogni punto il tensore delle **tensioni totali**, il **tensore delle pressioni interstiziali (isotropo)** e, **per differenza**, il tensore delle **tensioni efficaci**.

Importanti implicazioni del principio delle tensioni efficaci sono:

- una variazione di tensione efficace comporta una variazione di resistenza,
- se non vi è variazione di tensione efficace non varia la resistenza,
- una variazione di volume è sempre accompagnata da una variazione di tensione efficace,
- una variazione di tensione efficace non comporta necessariamente una variazione di volume,
- **condizione necessaria e sufficiente affinché si verifichi una variazione di stato tensionale efficace è che la struttura del terreno si deformi, la deformazione può essere volumetrica, di taglio o entrambe.**

Passiamo ora ad esaminare la situazione delle **pressioni neutre ed effettive quando vi è un moto di filtrazione** e consideriamo lo schema riportato a lato.

Se mantenendo fisso il livello dell'acqua nel recipiente, **si abbassa di h il serbatoio**, si ha un movimento d'acqua dal recipiente verso il serbatoio.

Poiché **la perdita di carico avviene praticamente tutta nel materiale granulare**, la pressione neutrale al fondo del recipiente può essere espressa da $u = (h_1 + h_2 - h) \gamma_w$; come si vede la **pressione neutrale è diminuita di $h \gamma_w$** , rispetto a quella che si ha con acqua ferma.

D'altra parte poiché la pressione totale al fondo del recipiente è determinata soltanto dal peso del terreno e dell'acqua al di sopra di esso, significa che è rimasta sempre la stessa e **la pressione effettiva è aumentata di $h \gamma_w$** .

Sul generico **piano AA è aumentata proporzionalmente di $\frac{z}{h_2} h \gamma_w$**

Questo incremento della pressione effettiva, dovuto al flusso dell'acqua attraverso i vuoti, è indicato come PRESSIONE DI FILTRAZIONE.

La **PERDITA DI CARICO** tra la superficie superiore del materiale granulare e la profondità z è data da $h \cdot z / h_2$.

Il **GRADIENTE IDRAULICO** corrispondente è $i = h/h_2$.

La **PRESSIONE DI FILTRAZIONE** può essere allora espressa con $i z \gamma_w$ e la **PRESSIONE EFFETTIVA** da $\sigma' = z \gamma' + i z \gamma_w$.

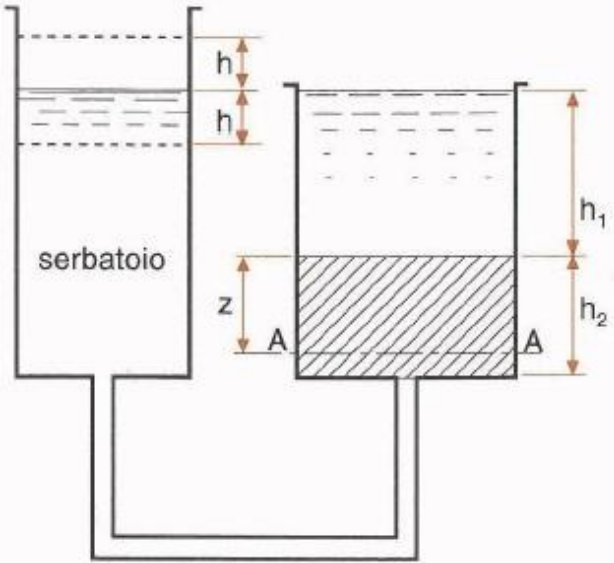
Se il serbatoio viene alzato di h rispetto al recipiente cosicché l'acqua fluisca dal serbatoio attraverso il materiale granulare, la pressione dell'acqua alla base del recipiente aumenta di $h \gamma_w$; quindi la pressione effettiva sul piano AA è ridotta a $\sigma' = z \gamma' - i z \gamma_w$.

Se si aumenta il gradiente idraulico alzando il serbatoio, la pressione di filtrazione aumenta fino ad un valore $z \gamma'$ per cui la pressione effettiva σ' si annulla.

Ciò avviene quando $z \gamma' - i_c z \gamma_w = 0$ e quindi: $i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w}$

Il **gradiente idraulico con il quale la pressione effettiva diventa nulla è chiamato gradiente idraulico critico**; nelle condizioni corrispondenti al gradiente idraulico critico un terreno granulare non può sopportare alcun carico e le particelle di sabbia vengono a galleggiare ed a muoversi nell'acqua.

Questo fenomeno, che in certe situazioni viene indicato come sifonamento, si verifica ogni volta che si raggiunge e supera il gradiente idraulico critico; può avvenire al fondo di scavi sotto falda, in problemi di dighe in terra, arginature.



STORIA TENSIONALE E STATI DEL TERRENO

Si è fino ad ora fatto riferimento alle sole tensioni verticali ad una generica profondità z . La definizione di tensione efficace si applica ovviamente a tutte le componenti del tensore degli sforzi, però è **lo stato di tensione geostatico (definito dalle tensioni verticali ed orizzontali) che deve essere valutato preliminarmente per condurre analisi geotecniche**.

Per quanto riguarda le **TENSIONI EFFICACI ORIZZONTALI**, la loro determinazione non è immediata come avviene per le verticali, essendo influenzate da fattori diversi dal solo peso proprio del terreno, dalle pressioni interstiziali e da eventuali sovraccarichi esterni. In particolare si deve tenere conto di aspetti legati alla «storia» passata del terreno (geologica e recente) cioè alla cosiddetta «**storia tensionale**» (qualcosa di analogo avviene negli ammassi rocciosi ove le tensioni verticali totali dipendono significativamente dal contributo gravitativo, mentre quelle orizzontali anche da componenti tettoniche, legate a fenomeni deformativi della crosta terrestre).

Il concetto di **storia tensionale** non serve solo come elemento di valutazione delle tensioni efficaci orizzontali, ma anche come aspetto di primaria importanza per la definizione dello «**stato**» di un terreno.

In relazione alle tensioni efficaci orizzontali si può, al momento, indicare che esse sono legate alle verticali da un fattore di proporzionalità, da definirsi proprio in relazione alla storia passata dell'elemento in esame.

Si è soliti assegnare alla **tensione orizzontale efficace** la forma $\sigma'_{ho} = K_0 \sigma'_{vo}$ nella quale il coefficiente K_0 (da applicarsi solo alle tensioni efficaci), indicato come **coefficiente di spinta a riposo** (con il termine si considera il fatto che il fenomeno avviene in assenza di deformazioni laterali) dipende dalla coordinata z .

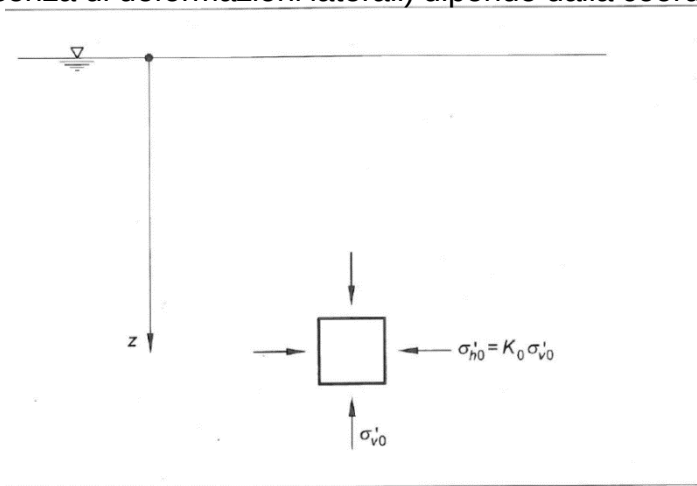


FIGURA 3.1
Tensioni geostatiche efficaci.

In genere K_0 ha un valore compreso tra 0,4 e 0,6

Questa situazione di condizioni litostatiche è in genere modificata da altri fenomeni come: variazioni del livello di falda, capillarità, movimenti tettonici, cementazione, incrudimento tixotropico, creep drenato (aging), ecc.

Il verificarsi o meno di questi fenomeni influenza notevolmente il comportamento del terreno e lo stato tensionale naturale. 37

Per questo si parla di **storia tensionale del deposito**.

Noto il valore della tensione orizzontale è possibile definire lo stato di tensione in un piano di Mohr. Ipotezzando che le tensioni verticale ed orizzontale siano tensioni principali, i tre casi sotto illustrati rappresentano altrettanti condizioni iniziali possibili.

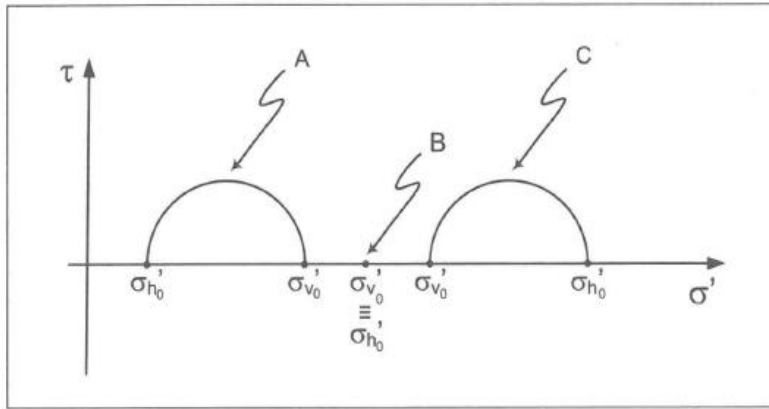


Fig. 3.20 Possibili stati iniziali nella rappresentazione di Mohr

I tre casi indicano quindi:

- Caso A: $\sigma'_{v0} > \sigma'_{h0}$
- Caso B: $\sigma'_{v0} = \sigma'_{h0}$ (condizione isotropa)
- Caso C: $\sigma'_{v0} < \sigma'_{h0}$

Durante la sedimentazione, la **tensione verticale totale nel punto P**, in corrispondenza del piano di campagna, è **inizialmente uguale alla pressione interstiziale, quindi la tensione efficace verticale risulta nulla**.

Durante la deposizione, dopo un certo periodo di tempo, il terreno nel punto P si trova ad una certa profondità z dal piano di campagna, e una volta raggiunto l'equilibrio sotto l'azione del peso del terreno sovrastante, si osserva che la pressione interstiziale è rimasta immutata, mentre per effetto del peso del terreno sovrastante, è aumentata la tensione verticale totale e con essa, per il principio delle tensioni efficaci, anche la tensione efficace verticale, $\sigma'_v(A)$.

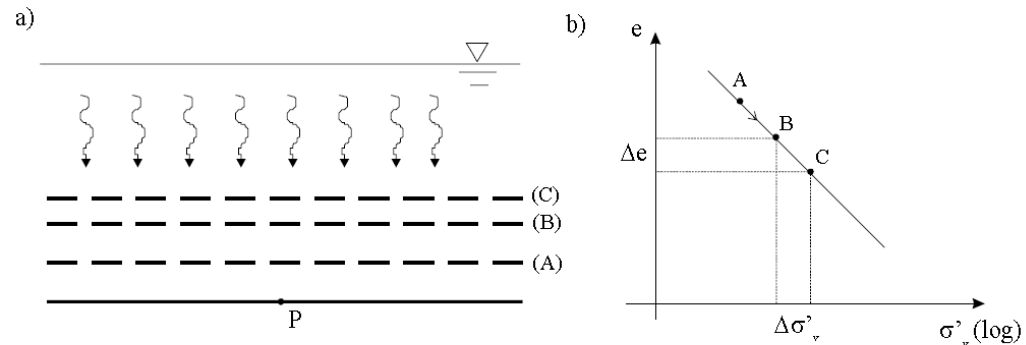


Figura 3.5 - Sedimentazione in ambiente lacustre (a) e linea di compressione vergine (b)

Durante la consolidazione, il terreno sotto il peso degli strati sovrastanti è assoggettato ad una compressione assiale che si può ipotizzare avvenga senza deformazioni laterali, date le condizioni di simmetria che devono essere soddisfatte considerando che il fenomeno avviene su un'area grande. Il fenomeno di consolidazione può essere descritto da una **relazione lineare** nel diagramma in cui l'indice dei pori “ e ” è in scala normale e la pressione verticale efficace “ σ'_{v0} ” è in scala logaritmica.

I valori si dispongono su una retta detta **linea di compressione vergine (linea ABC)**.

In queste condizioni il **coefficiente di spinta a riposo K_0 (NC)** dipende solo dalla natura del terreno e **può essere determinato mediante formule empiriche**.

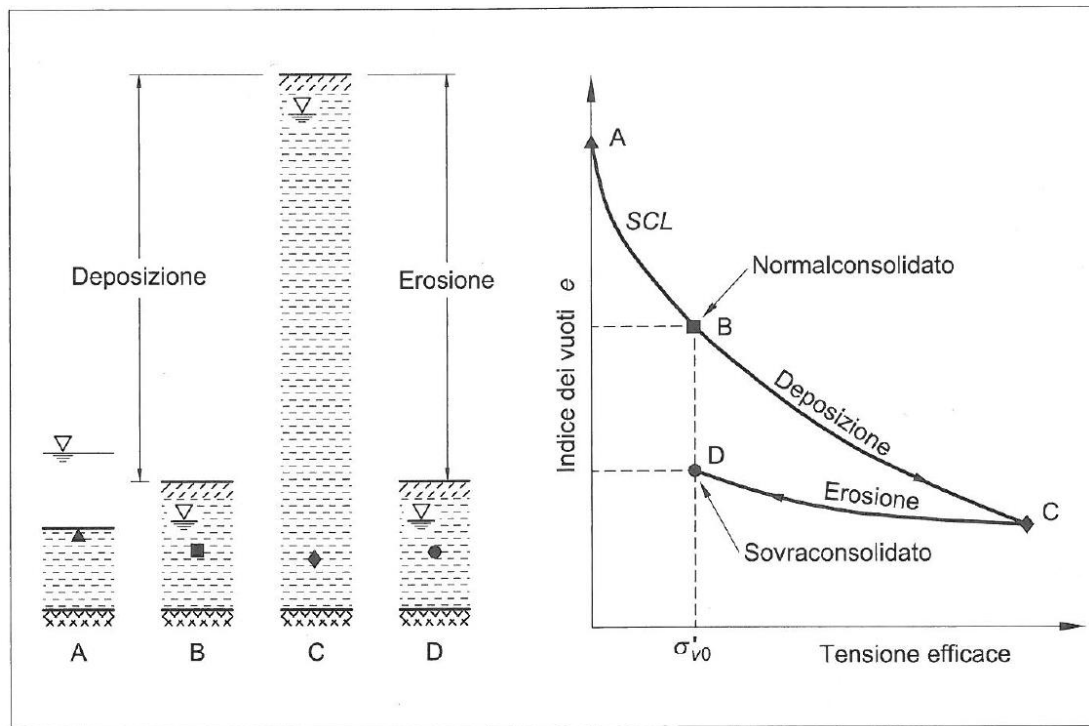


FIGURA 4.1 Storia tensionale di un elemento di volume (Skempton, 1970).

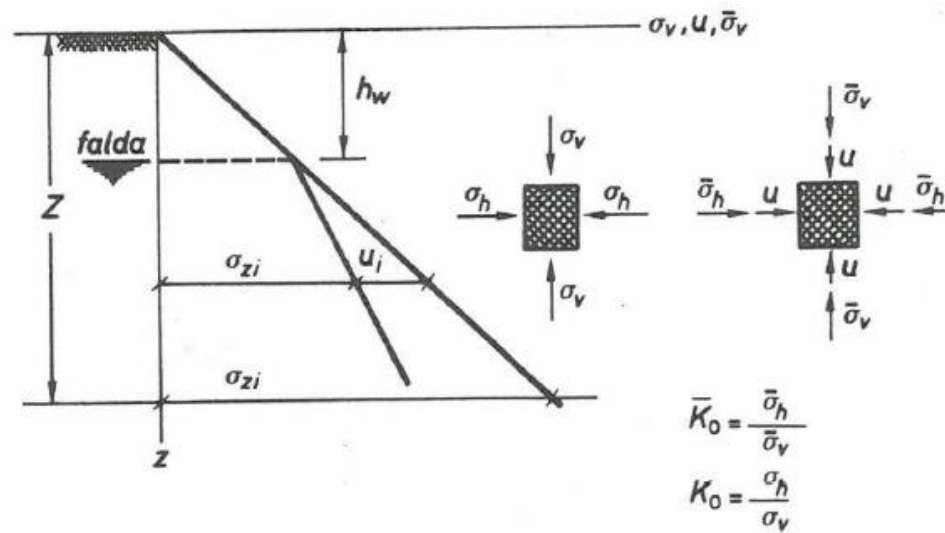
Si definisce:

- **normalmente consolidato o normalconsolidato** (NC: *normally consolidated*): un elemento di terreno la cui storia tensionale è tale che la tensione verticale efficace alla quale è attualmente sottoposto all'interno di un deposito, è la massima tensione verticale efficace sperimentata;
- **preconsolidato o sovraconsolidato** (OC: *over consolidated*): è un elemento di terreno che si trova attualmente sottoposto all'interno di un deposito, a una tensione verticale efficace minore a quella massima raggiunta nel corso della sua storia. Tale massimo valore viene detto *tensione di preconsolidazione* e si indica con il simbolo σ'_p ;
- **rapporto di preconsolidazione** (OCR: *Over Consolidation Ratio*) è il rapporto tra la tensione di preconsolidazione e la tensione efficace verticale attuale:

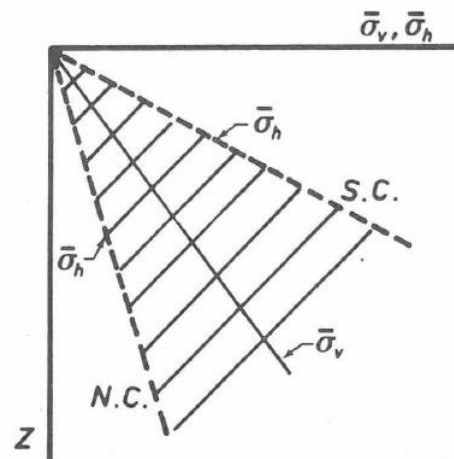
$$OCR = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_z} \geq 1$$

L'argilla **sovraconsolidata** ha una struttura caratterizzata da una maggiore resistenza al taglio e da una minore compressibilità.

TENSIONI GEOSTATICHE



CAMPO DI VARIAZIONE DELLA TENSIONE σ_h IN TERRENI DI DIVERSO TIPO



In condizioni di deformazione laterale impedita, quali quelle monodimensionali, le tensioni orizzontali aumentano con l'aumentare di quelle verticali. Evidenze sperimentali hanno mostrato che **per un terreno NC** è possibile definire un coefficiente di proporzionalità, detto **coefficiente di spinta a riposo**, che permette di calcolare le tensioni orizzontali efficaci a partire da quelle verticali:

$$K_{o(NC)} = \frac{\sigma'_{ho}}{\sigma'_{vo}}$$

Il coefficiente di spinta a riposo K_o può essere valutato mediante una relazione empirica, detta formula di Jaky:

$$K_{o(NC)} = \left(1 + \frac{2 \sin \phi'}{3} \right) \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'}$$

in cui: ϕ' è l'angolo di resistenza al taglio del terreno. Tale angolo assume generalmente valori compresi tra 20° e 45°. La formula di Jaky è comunemente utilizzata nella **forma semplificata la cui applicabilità**, per le pratiche applicazioni, è stata verificata da evidenze sperimentali:

$$K_{o(NC)} \cong 1 - \sin \phi'$$

Si è visto che le **tensioni orizzontali efficaci** sono influenzate dalla storia tensionale: durante una fase di scarico (nella quale un terreno inizialmente NC diventa OC, cioè OCR aumenta) esse si riducono non più proporzionalmente rispetto a quelle verticali. Questo aspetto può essere spiegato, intuitivamente, considerando l'assetto più compatto che viene raggiunto a causa della riduzione di “e”; tale assetto gioca il ruolo di una sorta di «confinamento» facendo sì che le tensioni orizzontali diminuiscano in modo meno marcato.

È ancora possibile definire un **coefficiente di spinta a riposo valido per il terreno sovraconsolidato**, a mezzo della seguente relazione empirica:

$$K_{o(OC)} = K_{o(NC)} \cdot OCR^\alpha \cong (1 - \sin \phi') \cdot OCR^\alpha$$

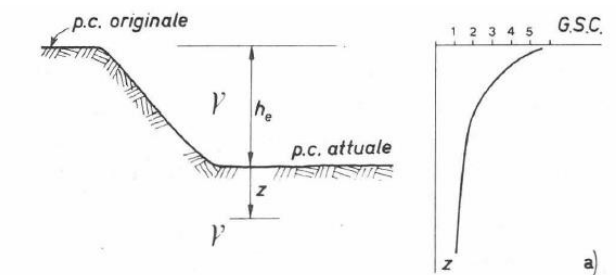
in cui l'esponente α dipende dal tipo di terreno e dalle sue caratteristiche. Sia per terreni a grana grossa che a grana fine, evidenze sperimentali indicano un intervallo di variazione pari a $\alpha \sim 0.35 \div 0.70$. In assenza di dati certi, si assume un valore medio $\alpha = 0.5$.

Le relazioni sopra descritte permettono una stima sufficientemente accurata di K_0 : sono applicabili solo nelle condizioni per le quali sono state introdotte (terreni NC e fenomeni di preconsolidazione per scarico e ricarico tensionale).

Valori più precisi di σ'_{ho} possono essere ottenuti mediante misure sperimentali effettuate, con apposite attrezzature, direttamente in sito.

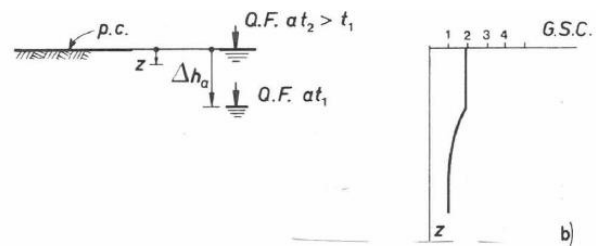
Dal valore della pressione orizzontale efficace è possibile poi ricavare il valore della pressione orizzontale totale sfruttando il principio delle pressioni efficaci e sommandogli il valore di u .

Il grado di sovraconsolidazione conseguente a fenomeni di erosione è massimo vicino alla superficie e tende all'unità con l'aumentare della profondità, poiché la diminuzione di pressione conseguente all'erosione è costante, mentre la pressione effettiva aumenta con la profondità.



$$G.S.C. = \frac{\bar{\sigma}_{vmax}}{\bar{\sigma}_v} = \frac{\gamma(h_e + z) - u(z)}{\gamma z - u(z)}$$

a) sovraconsolidazione dovuta all'erosione

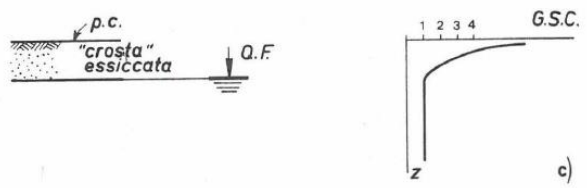


$$G.S.C. = \frac{\bar{\sigma}_{vmax}}{\bar{\sigma}_v} = 1 + \frac{\Delta h_a \gamma' a}{\gamma z - u(z)}$$

$Q.F.$ = quota falda; t = tempo.

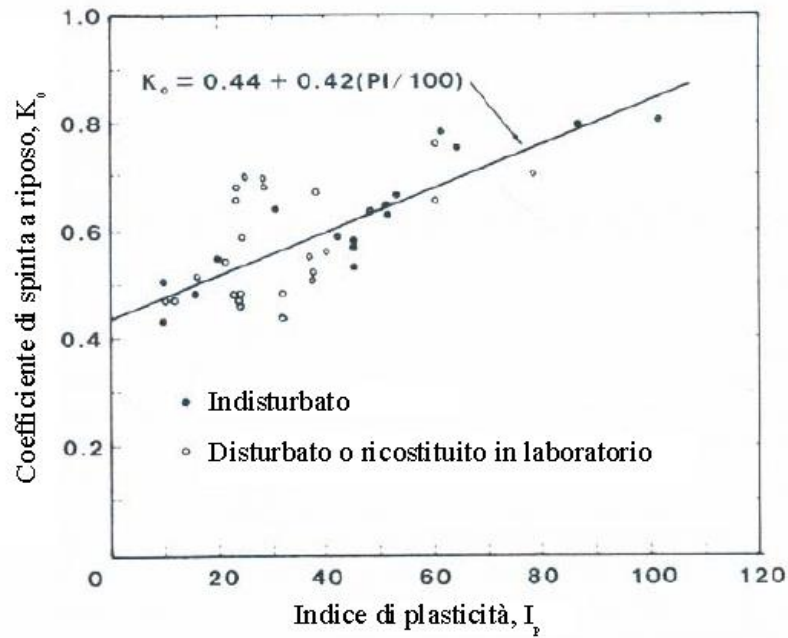
b) sovraconsolidazione dovuta all'oscillazione della falda freatica

Variazioni del livello di falda danno luogo a sovraconsolidazione e in prossimità della superficie l'oscillazione di falda è accompagnata dall'azione dell'evaporazione e della capillarità, per cui si può avere un grado di sovraconsolidazione più elevato.

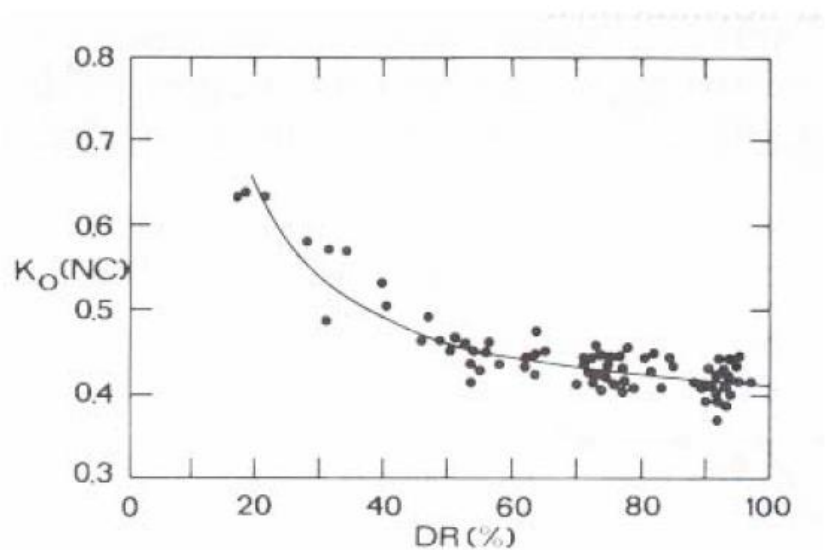


c) sovraconsolidazione dovuta all'essiccamento superficiale

L'essiccamento, il gelo e l'ossidazione agenti sul terreno argilloso superficiale danno luogo alla formazione di una "crosta superficiale", il cui spessore dipende dalla permeabilità dell'argilla e dalle condizioni climatiche. Questa crosta è formata da argilla compatta, talora fessurata, con contenuto d'acqua vicino al limite di plasticità.



Per terreni coesivi NC, le relazioni empiriche esistenti in letteratura legano generalmente K_0 a I_p , con K_0 linearmente crescente con I_p .



Per terreni incoerenti NC esistono in letteratura correlazioni tra K_0 e D_R , nelle quali K_0 decresce al crescere di D_R .

FIGURA 4.2
Sovraconsolidazione dovuta
a oscillazioni di falda.

4.3 Sovraconsolidazione prodotta da oscillazioni di falda

Molte argille tenere risultano leggermente sovraconsolidate, anche in assenza di evidenze di scarico tensionale dovuto a erosione, e possibili cause sono da ricercarsi in fenomeni di oscillazione di falda e di deformazioni differite nel tempo (*creep*).

Per illustrare il primo di questi fenomeni, si consideri la successione di eventi mostrata in figura 4.2 e schematizzabile come segue. Durante la deposizione in acqua, un elemento di terreno consolida seguendo il tratto «a» della curva di compressione (figura 4.2.b). Successivamente, si immagini un abbassamento del livello di falda fino alla profondità z_1 dal piano campagna, con ulteriore compressione dell'elemento di terreno lungo il tratto «b», corrispondente all'aumento della tensione verticale efficace, che raggiunge il valore σ'_p . Si supponga infine che il livello di falda si innalzi nuovamente fino al piano campagna, con scarico dell'elemento lungo il ramo «c».

Come può intuirsi, il massimo valore della tensione verticale efficace (corrispondente dunque alla tensione di sovraconsolidazione), a ogni profondità maggiore di z_1 , è dato da

$$\sigma'_p = \gamma z - \gamma_w (z - z_1)$$

con $z > z_1$, mentre quello della tensione verticale efficace attuale corrisponde a

$$\sigma'_{v0} = \gamma z - \gamma_w z$$

Il grado di sovraconsolidazione alla generica profondità z risulta così espresso dalla relazione

$$OCR = \frac{\gamma' z + \gamma_w z_1}{\gamma' z} = 1 + \frac{\gamma_w z_1}{\gamma_w z}$$

con valori compresi tra 2 (per $z = z_1$) e 1 (per $z \rightarrow \infty$).

La limitazione $z > z_1$ introdotta nelle precedenti relazioni trova una sua motivazione nel fatto che, a profondità $z < z_1$, agli effetti prodotti dall'oscillazione della falda si sovrappongono quelli dovuti a fenomeni di essiccamento, con il risultato che il grado di sovraconsolidazione effettivo è maggiore del valore prevedibile sulla base delle considerazioni qui esposte (linea tratteggiata in figura 4.2.d) e rimane di incerta valutazione. Si noti anche che, al disotto della profondità z_1 , la differenza $\sigma'_p - \sigma'_{v0} = \gamma_w z_1$ rimane costante con la profondità (figura 4.2.c).

COMPRESSIONE EDOMETRICA DELLE ARGILLE E CONSOLIDAZIONE

Le **caratteristiche di compressibilità delle terre** sono spesso determinate mediante le prove di compressione edometrica. Le condizioni al contorno per queste prove sono caratterizzate da uno stato di simmetria radiale e dall'assenza di componenti radiali della deformazione che è quindi monodimensionale.

Le **prove edometriche** sono semplici nelle apparecchiature e nelle procedure operative e **rappresentano la consolidazione naturale del terreno sotto il peso degli strati sovrastanti, cioè una compressione assiale senza deformazioni laterali**.

La **prova edometrica standard** viene eseguita incrementando con **progressione geometrica il carico assiale**, che ad ogni gradino viene **mantenuto costante per un tempo sufficiente a completare il fenomeno idraulico legato alla sua applicazione**, fenomeno detto di **"consolidazione"**.

Quando un nuovo carico è applicato al terreno si possono avere: variazioni di volume per compressione delle particelle solide, per compressione del fluido che riempie i pori e per espulsione del fluido e riaggiustamento delle particelle solide in una nuova posizione, corrispondente ad un indice dei vuoti più piccolo.

La compressibilità delle particelle solide e dell'acqua è però molto piccola rispetto a quella della struttura del terreno. **Nelle terre sature si hanno perciò variazioni di volume apprezzabili solo per il riaggiustamento delle particelle con espulsione del fluido.**

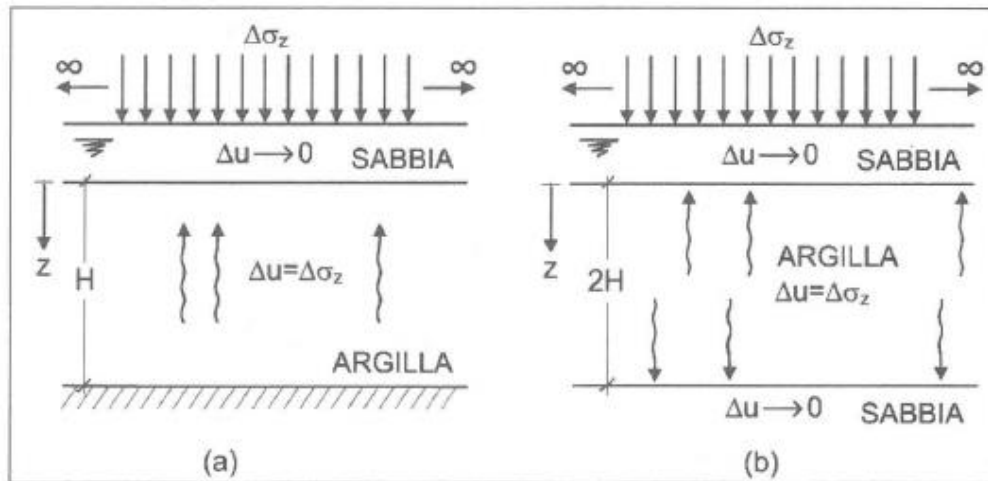
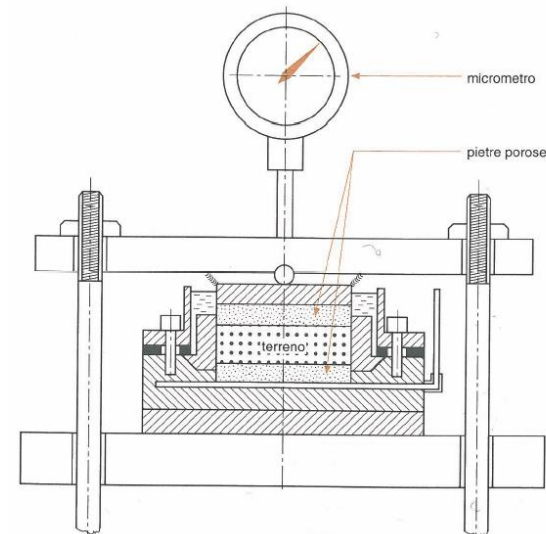


Fig. 5.3 Condizioni di drenaggio al contorno per consolidazione monodimensionale



La pressione efficace σ' controlla sia le variazioni di volume che la resistenza al taglio ed è legata alla pressione totale e neutrale dalla relazione $\sigma' = \sigma - u$.

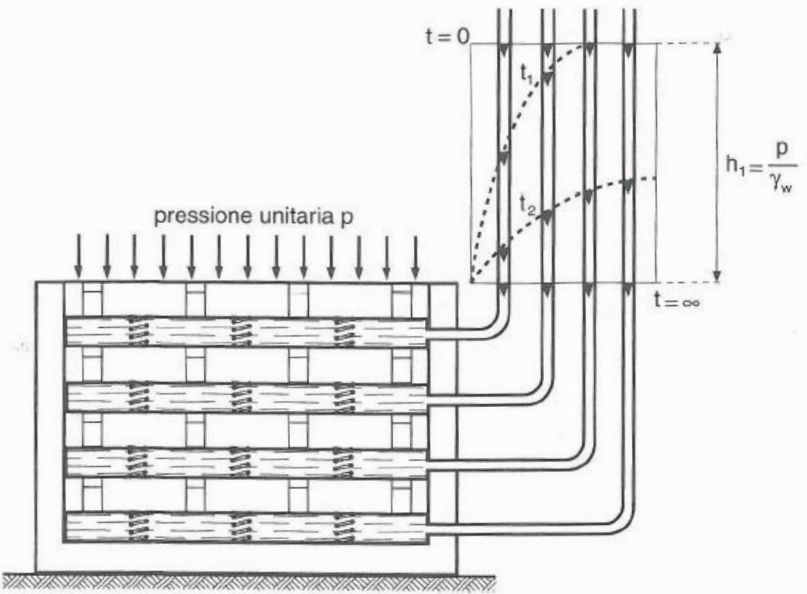
In **un'argilla satura**, poiché il fluido dei pori è incompressibile, un aumento uniforme della pressione totale ($\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$) dà luogo ad un **eguale** incremento della pressione neutrale, cioè $\Delta\sigma = \Delta u$. D'altro lato l'aumento di pressione neutrale in una zona caricata dà luogo a un **movimento di allontanamento dell'acqua**, mentre il **volume del terreno della zona caricata diminuisce**. Questa **variazione di volume, accompagnata dall'espulsione del fluido, è chiamata consolidazione**.

Il fenomeno può essere rappresentato nel modo seguente.

Un recipiente cilindrico contiene una serie di pistoni forati e separati gli uni dagli altri con delle molle. Tutto lo spazio vuoto è riempito d'acqua; applicando una pressione unitaria “**p**” in superficie, al primo istante essa è tutta sopportata dall'acqua; **dopo un certo tempo t_1 la parte superiore del recipiente ha perso un po' d'acqua e la diminuzione di volume ha messo in compressione le molle in questa zona, mentre nella parte inferiore non è cambiato nulla**. Nei piezometri il comportamento è rappresentato dalla curva isocrona t_1 .

Il processo continua e dopo un certo tempo t_2 avremo un'altra curva isocrona t_2 e dopo un tempo relativamente lungo, cioè per $t = t_\infty$ la sovrappressione dell'acqua diventerà nulla.

In questo modello fisico la molla rappresenta lo scheletro solido del terreno, l'acqua il fluido interstiziale, i fori nei pistoni la permeabilità.



Nella prova edometrica standard si ha consolidazione unidimensionale e si misura la velocità e l'entità degli assestamenti derivanti dalle variazioni di volume del campione.

Il campione indisturbato di argilla è posto in un anello metallico, cosicché è impedito ogni movimento laterale, mentre sulle facce superiori e inferiori sono poste delle piastre porose che **permettono il drenaggio dell'acqua solo in direzione verticale**.

Il campione è caricato verticalmente e si misurano i cedimenti nel tempo a carico costante.

Quando il cedimento è sostanzialmente completato (di solito dopo 24 ore), si aumenta la pressione e si misurano i cedimenti nel tempo con il nuovo carico. Il procedimento viene ripetuto per tutto il campo di pressioni che si deve studiare.

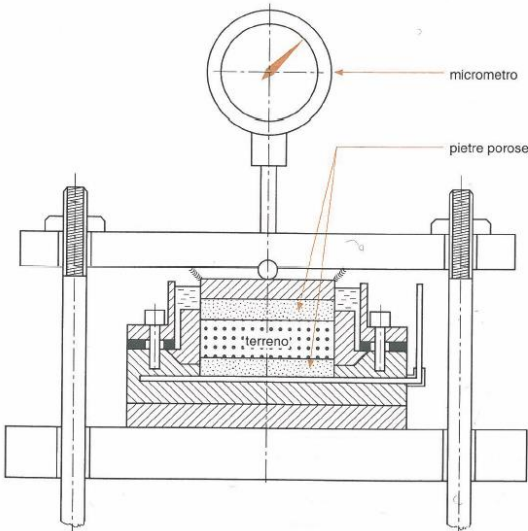
Le dimensioni del provino rappresentano un compromesso tra varie esigenze.

Al crescere delle dimensioni del provino cresce la sua rappresentatività delle caratteristiche dello strato; in realtà **nella maggior parte dei casi il provino viene ricavato da campioni indisturbati che frequentemente hanno diametro di 8 ÷ 10 cm.**

Il rapporto diametro-altezza in genere non deve essere inferiore a 2,5 per ridurre al minimo l'influenza dell'attrito tra la superficie laterale e l'anello di contenimento.

Gli **incrementi di carico verticale** sono applicati in progressione geometrica, ad esempio, con questa sequenza: 25, 50, 100, 200, 400, 800, 1600 kN/m².

Lo scarico viene generalmente eseguito con un numero di decrementi pari a metà di quello degli incrementi di carico.



Con **argille normalconsolidate** il carico verticale deve raggiungere valori **pari almeno a circa otto volte** la pressione di consolidazione; in **argille sovraconsolidate** si dovrebbero raggiungere **valori superiori a otto volte** la pressione di consolidazione.

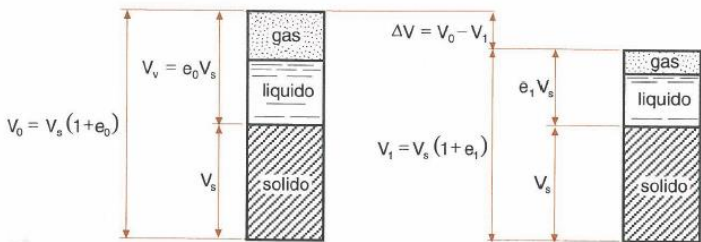
Dai risultati delle prove edometriche è possibile ottenere una relazione tra l'indice dei vuoti e la pressione effettiva ed un insieme di curve rappresentative dei cedimenti in funzione del tempo per ogni pressione di prova.

La **variazione di altezza ΔH** per unità di altezza iniziale H₀, essendo questa una **prova di compressione monodimensionale**, è uguale alla **variazione di volume ΔV per unità di volume V₀**.

$$n = \frac{V_v}{V_t} = \frac{e_0}{1 + e_0}$$
$$\Delta n = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \epsilon$$

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta e}{1 + e_0}$$

Relazioni tra parametri del terreno per il calcolo dei cedimenti. A sinistra le relazioni di laboratorio, a destra quelle di campo.



La **variazione di altezza ΔH** per unità di altezza iniziale H_0 , essendo la prova edometrica una **prova di compressione monodimensionale**, è **uguale alla variazione di volume ΔV per unità di volume V_0** , indicata con ϵ , cioè:
$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{\Delta V}{V_0}$$

Si può esprimere allora ΔV in funzione dell'indice dei vuoti “e”:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_0 - V_1}{V_0} = \frac{V_s(1 + e_0) - V_s(1 + e_1)}{V_s(1 + e_0)} = \frac{e_0 - e_1}{1 + e_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0}$$

e quindi **si può esprimere la diminuzione di spessore (rappresentante un potenziale cedimento) con la relazione:**
$$\Delta H = H_0 \frac{\Delta e}{1 + e_0} = H_0 \Delta \epsilon$$

che è indipendente dal meccanismo che provoca la variazione di volume e dal grado di saturazione del terreno.

I risultati di una prova edometrica su un campione di argilla vengono spesso riportati nel diagramma (**indice dei vuoti e - pressione σ'**) e la **pendenza della curva** è chiamata **INDICE O COEFFICIENTE DI COMPRESSIBILITÀ**:
$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'}$$

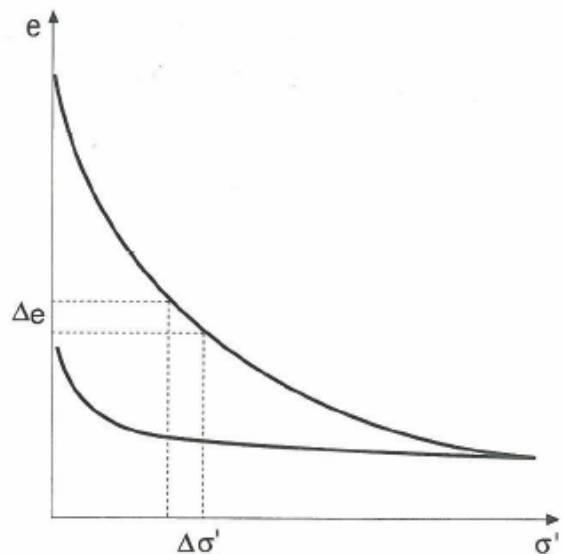
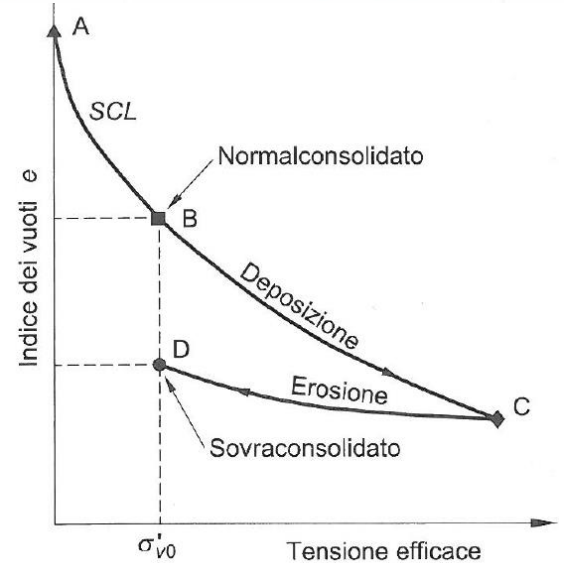
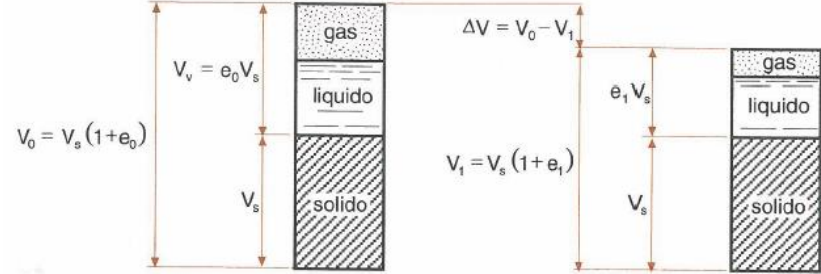
Notare che, per $\Delta \sigma'$ costante, a_v diminuisce all'aumentare della pressione σ' .

Il cedimento può essere determinato, riprendendo la relazione $\Delta H = H_0 \frac{\Delta e}{1 + e_0} = H_0 \Delta \epsilon$, con $\Delta H = H_0 \Delta \sigma' m_v$

Nella quale: $m_v = \frac{a_v}{1 + e_0}$ è detto **COEFFICIENTE O MODULO DI COMPRESSIBILITÀ VOLUMETRICA O DI VOLUME**.

Questo coefficiente è reciproco del **MODULO EDOMETRICO**:
$$E' = \frac{\Delta \sigma'}{\Delta H / H_0} = \frac{\Delta \sigma'}{\Delta \epsilon} = M$$

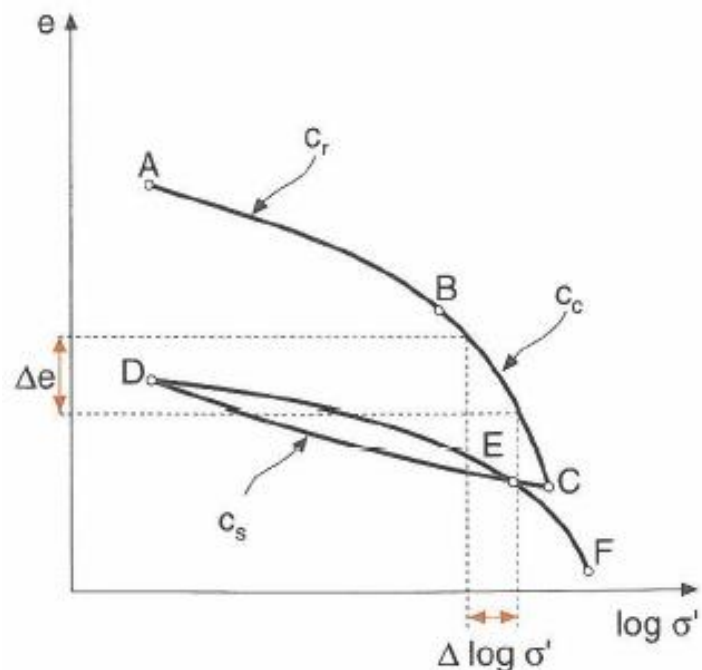
Cioè: $m_v = \frac{1}{E'}$



I risultati della prova edometrica vengono sintetizzati in un piano a scala semilogaritmica ($e - \log \sigma'$) in cui la curva sforzi deformazioni assume l'andamento tipico riportato come nella figura a dx.

- Nel primo tratto **AB**, detto di ricompressione, la compressibilità del terreno è bassa e con deformazione prevalentemente elastica.
- Nel secondo tratto **BC** detto di compressione, la compressibilità aumenta notevolmente e le deformazioni sono di natura prevalentemente plastica, come è evidenziato dal **tratto CD di scarico o di rigonfiamento**: il Δe corrispondente a **CD** rappresenta la deformazione di natura elastica, mentre quello corrispondente ad **AD** rappresenta la deformazione plastica.

Riprendendo a comprimere il provino si ha nel tratto **DE** un comportamento prevalentemente elastico fino alla massima tensione $\sigma'_p(C)$ che aveva prodotto deformazioni plastiche nel precedente ciclo, e da **C** in avanti si hanno deformazioni sia elastiche che plastiche.



La tensione $\sigma'_p(C)$ chiamata **pressione di consolidazione**, può essere considerata una tensione di snervamento; rappresenta la massima tensione di consolidazione cui è stato sottoposto il terreno in seguito a processi di consolidazione di vario tipo.

Gli andamenti con la profondità della **pressione di consolidazione σ'_p** e della tensione verticale effettiva σ'_{v0} in genere, rappresentano la storia tensionale di un deposito.

In genere accade che:

- la consolidazione di tipo meccanico e quella per aging danno luogo ad andamenti di σ'_{v0} e di σ'_p tali che la loro differenza ($\sigma'_{v0} - \sigma'_p$) è costante con la profondità;
- la consolidazione dovuta invece ad essiccamento o ad altri fenomeni fisico-chimici dà luogo ad andamenti irregolari.

Con riferimento alle curve riportate nel piano semilogaritmico e-log σ' si possono individuare i parametri di compressibilità:

- la pendenza della curva nel tratto di **ricompressione A-B** chiamata **indice di ricompressione c_r** :

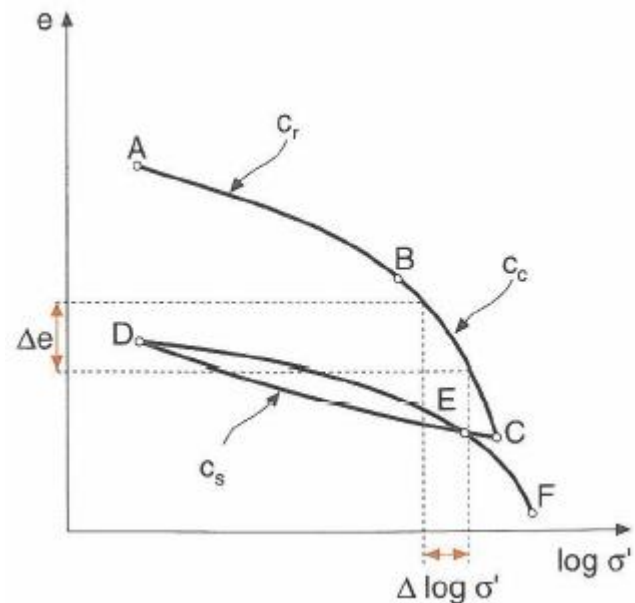
$$c_r = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'_v}$$

- la pendenza della curva nel tratto di **compressione B-C** definita **indice di compressione c_c** :

$$c_c = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'_v}$$

I valori dell'indice di compressione variano:

- argille tra: 0,1 e 0,8, con valori più frequenti compresi tra 0,1 e 0,4;
- limi organici valori compresi tra 1,5 e 4;
- argille organiche superiore a 4;
- torbe anche valori superiori a 10.



- la pendenza della curva nel tratto di **scarico C-D** definita **indice di rigonfiamento o scarico c_s** :

$$c_s = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'_v}$$

Sono state proposte varie correlazioni empiriche che permettono di ottenere delle indicazioni sui parametri di compressibilità dal valore di alcune proprietà indici.

Tra le più usate vi è quella di Terzaghi e Peck (1967) che lega l'indice di compressione al limite di liquidità: $c_c = 0.009(w_L - 10)$

In genere **il valore dell'indice di ricompressione c_r ottenibile dalla prova edometrica è superiore al valore esistente in situ**; secondo Leonards (1976) tipici valori di c_r dovrebbero ricadere nell'intervallo $0,015 \div 0,035$.

Il valore dell'indice di rigonfiamento c_s corrispondente a un ciclo di scarico è in genere dell'ordine di $1/5 \div 1/10$ del valore di c_c (Ladd, 1971).

Le deformazioni che avvengono con la consolidazione sono legate principalmente alla fuoriuscita dell'acqua dai vuoti, ma si sviluppano anche a seguito delle deformazioni elastiche delle particelle di terreno e delle deformazioni plastiche della struttura. Queste ultime derivano dallo scorrimento relativo di una particella rispetto a un'altra, per effetto delle forze di taglio, e dalla diminuzione della distanza esistente tra due particelle, distanza dovuta alla presenza dell'acqua adsorbita e del doppio strato elettrico.

Possiamo definire i seguenti termini:

- Dalla porzione rettilinea del diagramma $e - \log p$ corrispondente a $p \geq p_c$, si ricava l'indice di compressibilità a_v come

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta p}$$

- Il coefficiente (o modulo) di compressibilità volumetrica m_v è

$$m_v = \frac{\Delta e}{\Delta p(1 + e_0)} = \frac{a_v}{1 + e_0} \quad (2.30)$$

Dalla Figura 2.16 si può allora ricavare il cedimento come

$$\Delta H = \frac{\Delta e}{1 + e_0} H = m_v(\Delta p)H \quad (2.31)$$

Poiché la deformazione è $\epsilon = \Delta e/(1 + e_0)$ e m_v è equivalente a $1/E_s$, si ha semplicemente

$$\Delta H = \epsilon H \quad (2.31a)$$

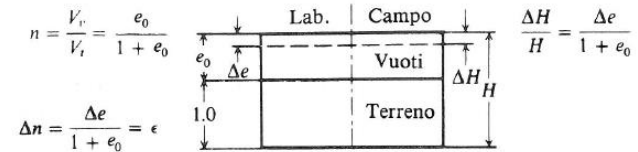


Figura 2.16 Relazioni tra parametri del terreno per il calcolo dei cedimenti. A sinistra le relazioni di laboratorio, a destra quelle di campo.

Più frequentemente, si calcola ΔH utilizzando C_c attraverso una relazione ricavata risolvendo la (2.29) rispetto a Δe e sostituendo nella precedente (2.31), così da ottenere

$$\Delta H = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{p'_0 + \Delta p}{p'_0} \quad (2.32)$$

Questa è semplicemente un'altra scrittura della (2.31a), nella quale il significato dei termini è il seguente:

- C_c è l'indice di compressione (corretto) ricavato dal diagramma $e - \log p$.
- e_0 è l'indice dei vuoti medio in situ per lo strato a cui si riferisce C_c .
- H è lo spessore dello strato. Per strati spessi sarebbe opportuno usare diversi valori di H , C_c ed e_0 e calcolare ΔH come somma dei cedimenti dei vari strati.
- p'_0 è la pressione geostatica efficace alla quota media dello strato H .
- Δp è l'aumento medio della pressione nello strato H dovuto alla fondazione, espresso nelle stesse unità di misura di p'_0 .

Il cedimento ΔH così calcolato sarà dato nelle stesse unità di misura di H .

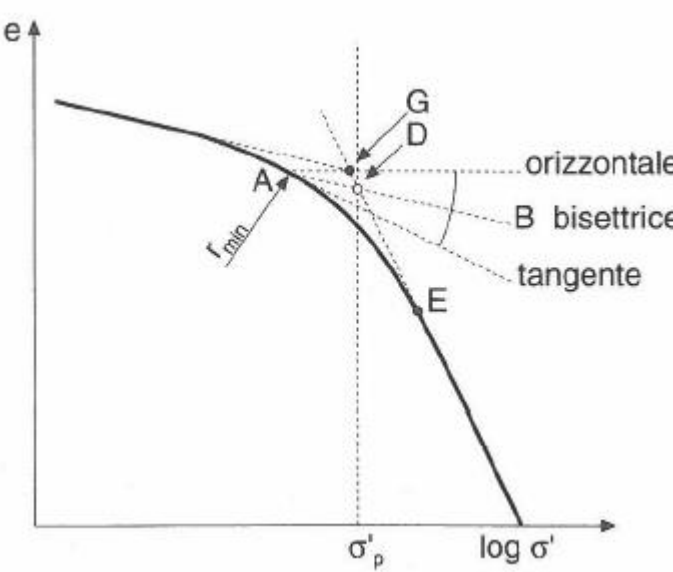
La **determinazione della pressione di consolidazione σ'_p** può essere eseguita graficamente con vari metodi; di seguito si descrive il più semplice e usato dovuto a Casagrande.

Nel diagramma ($e - \log \sigma'$) di un campione di argilla prelevato correttamente (indisturbato), si individua il punto di massima curvatura A e si traccia la linea AB bisettrice dell'angolo tra la orizzontale e la tangente per A.

Il punto di intersezione D di questa bisettrice con il prolungamento verso l'alto della parte retta della curva e $-\log \sigma'$ indica la pressione di consolidazione σ'_p .

Poiché spesso è difficile individuare il punto di massima curvatura, può essere utile controllare che il punto D cada tra il possibile limite inferiore indicato dalla intersezione G della retta di ricomprensione con quella di compressione e il possibile limite superiore dal punto E d'inizio della parte retta della curva ($e - \log \sigma'$).

La correttezza della determinazione della pressione di consolidazione σ'_p dipende principalmente dal disturbo subito dal campione durante le fasi di prelievo in situ e di preparazione del provino in laboratorio.



Confrontando il valore della pressione di consolidazione σ'_p con la tensione verticale effettiva σ'_{v0} attuale, si può determinare il grado di sovraconsolidazione OCR definito dal rapporto $OCR = \sigma'_p / \sigma'_{v0}$:

- con **OCR = 1** si ha **argilla normalconsolidata**
- con **OCR > 1** **argilla sovraconsolidata**.

Eseguendo la **prova edometrica su argille sature** si può controllare il **fenomeno della consolidazione unidimensionale**. Con l'applicazione della pressione al campione, il procedere della consolidazione potrebbe essere osservato misurando la diminuzione di pressione dell'acqua nei pori. Questa diminuzione procede in diverso grado nelle differenti parti del campione; più rapidamente nelle parti estreme, in cui il drenaggio è facilitato, meno rapidamente al centro.

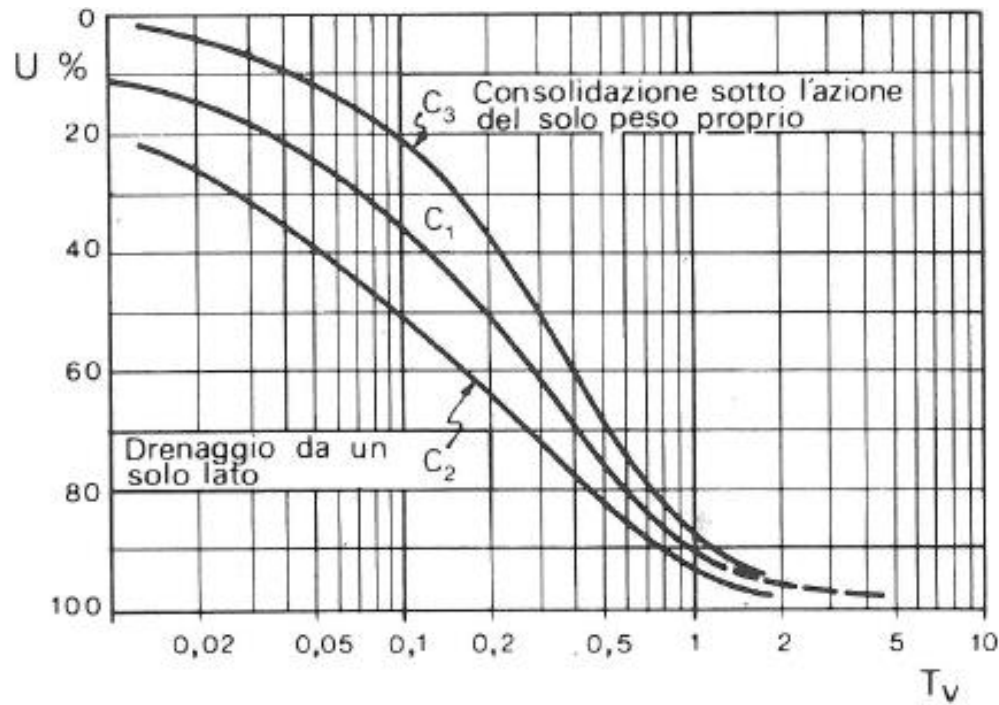
Nell'ipotesi che la relazione di Darcy e la relazione di continuità governino la diminuzione di pressione dell'acqua dei pori, è stata sviluppata da Terzaghi una **teoria per il calcolo della progressione dell'assestamento** conosciuta come **teoria della consolidazione** che conduce ad una **relazione tra il grado di consolidazione medio ed il tempo**: $U\% = f(T_v)$ con $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$

In questa espressione:

- **U%** è il **grado di consolidazione medio**, cioè la **percentuale di cedimento totale avvenuta ad un certo tempo *t* rispetto al cedimento totale**;
- **T_v** è un fattore adimensionale chiamato **fattore di tempo**;
- **c_v** è una caratteristica del terreno chiamata **coefficiente di consolidazione**;
- **H** è il **massimo percorso dell'acqua** e corrisponde alla metà dello spessore del provino nel caso della prova edometrica;
- **t** è il **tempo corrispondente al grado di consolidazione U**.

Si vede che il **tempo richiesto per raggiungere un certo grado di consolidazione, con date condizioni di drenaggio, varia con il quadrato di H**.

La relazione $U\% = f(T_v)$ è stata risolta per alcuni problemi pratici e la soluzione è riportata in tabelle o grafici come quella di Terzaghi che si riporta a sx valida per varie condizioni di drenaggio e di carico.



Il **coefficiente di consolidazione c_v** può essere valutato mediante alcune costruzioni grafiche nel diagramma deformazione-tempo relativo ad un gradino di carico della prova edometrica.

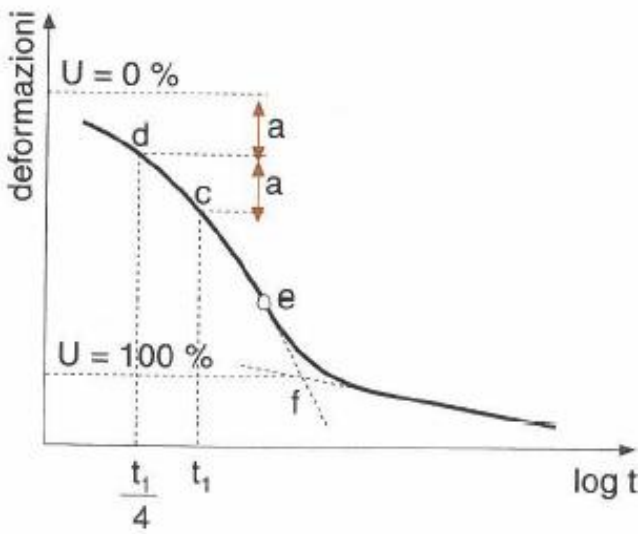
Si illustra di seguito il procedimento sviluppato da Casagrande e applicato alla curva deformazioni-logaritmo del tempo. Il primo passo del procedimento è costituito dalla valutazione delle deformazioni corrispondenti rispettivamente al **grado di consolidazione $U = 0\%$** ed **$U = 100\%$** .

CURVA SPERIMENTALE

Per ottenere il **punto corrispondente ad $U = 0\%$** bisogna scegliere un tempo t_1 inferiore a quello relativo alla metà della consolidazione totale sotto un dato carico: sia “c” il punto corrispondente nella curva. Si segna poi il punto d corrispondente al tempo $t_1/4$. La distanza verticale tra i due punti sia “a”; l'ordinata della linea che passa ad una distanza “a” al di sopra di “d” corrisponde a $U = 0\%$.

La $U = 0\%$ può essere in una posizione superiore a quella che risulta dalla prova edometrica; ciò è generalmente dovuto alla presenza di bolle d'aria nel terreno.

Per trovare il **punto corrispondente a $U = 100\%$** , dal punto di inflessione (e) della curva si porta la tangente fino ad incontrare, nel punto “f” corrispondente a $U = 100\%$, la tangente alla parte più bassa della curva sperimentale.



Confrontando la curva teorica con quella sperimentale si vede che esistono delle differenze. Mentre nella curva sperimentale la tangente al tratto finale è inclinata, in quella teorica è orizzontale. Il fenomeno che dà luogo alla differenza tra le due curve è chiamato **compressione secondaria**, mentre la **consolidazione è chiamata compressione primaria**. Non si conoscono ancora le leggi che regolano questa **compressione secondaria**, che sembra dovuta ad una resistenza viscosa al movimento relativo delle particelle di terra. Il fenomeno è importante in terreni con **materiale organico o molto plastici** ed in alcuni casi particolari, poiché può rappresentare una frazione abbastanza grande di assestamento.

Generalmente le curve sperimentali e teoriche coincidono fino a circa $U = 60\%$, perciò nel determinare il punto “e”, è necessario usare valori di t corrispondenti a gradi di consolidazione minori del 60% .

Generalmente si sceglie il valore di **t corrispondente ad $U = 50\%$ a cui corrisponde nella soluzione di Terzaghi $T_v = 0,197$** ; si può quindi valutare:

$$c_v = \frac{T_v}{t_{50}} H^2 \quad \text{essendo } H \text{ metà dell'altezza del provino.}$$

Il valore di c_v , espresso in cm^2/s varia più frequentemente tra 10^{-3} e 10^{-4} diminuendo all'aumentare del limite di liquidità.

Conoscendo c_v , a mezzo della $T_v = c_v t/H^2$ e utilizzando il diagramma $U\% = f(T_v)$, si può ricavare la relazione tempo-cedimenti per ogni opera che provochi consolidazione in uno strato di argilla.

Basandosi sui dati della prova edometrica si può anche ricavare **il coefficiente di permeabilità k** del campione sotto carico con l'equazione: **$k = c_v \cdot \gamma_w \cdot m_v$** ; dove:

- **m_v è il coefficiente di compressibilità di volume** già definito come $m_v = \frac{a_v}{1 + e_0}$ essendo $a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'}$
- e γ_w è il peso di volume dell'acqua.

Il valore del **coefficiente di consolidazione c_v** è influenzato dalla storia dello stato tensionale: in genere esso diminuisce nella fase di ricompressione fino alla pressione di consolidazione σ'_p e poi rimane abbastanza costante nel tratto normalconsolidato.

I valori di c_v corrispondenti alla fase di ricompressione e a quella di scarico spesso non sono affidabili; inoltre a causa della non omogeneità si possono avere valori di c_v diversi anche con provini ricavati dallo stesso campione.

Da ricordare che la previsione dell'andamento dei cedimenti nel tempo in un problema reale è uno dei problemi più difficili da risolvere.

Tale difficoltà dipende principalmente dalla possibilità di determinare un valore del **coefficiente di consolidazione c_v** che sia rappresentativo del comportamento del terreno in situ.

Il coefficiente c_v dipende dalla compressibilità, ma prevalentemente dalla permeabilità e quindi, viste le difficoltà connesse alla valutazione della permeabilità e il grande campo di variazione della stessa, è evidente che vi siano grosse difficoltà nel valutare adeguatamente c_v .

Si può anche determinare c_v con prove in situ o interpretando opportunamente l'andamento dei cedimenti e della pressione neutrale con opere in vera grandezza (rilevati di prova).

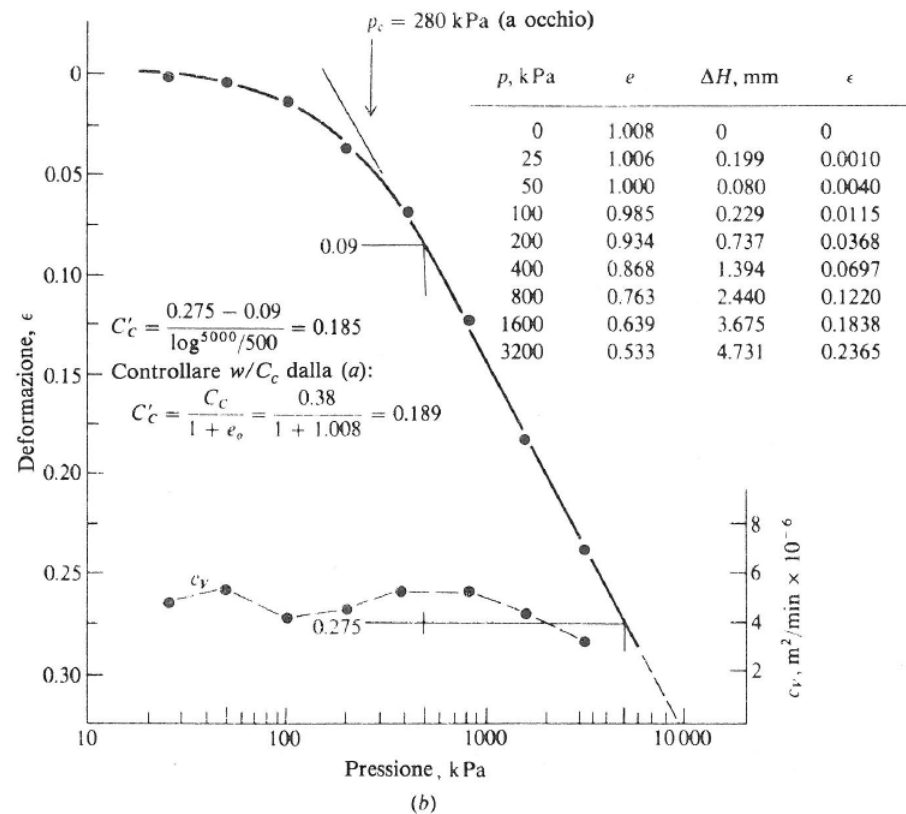
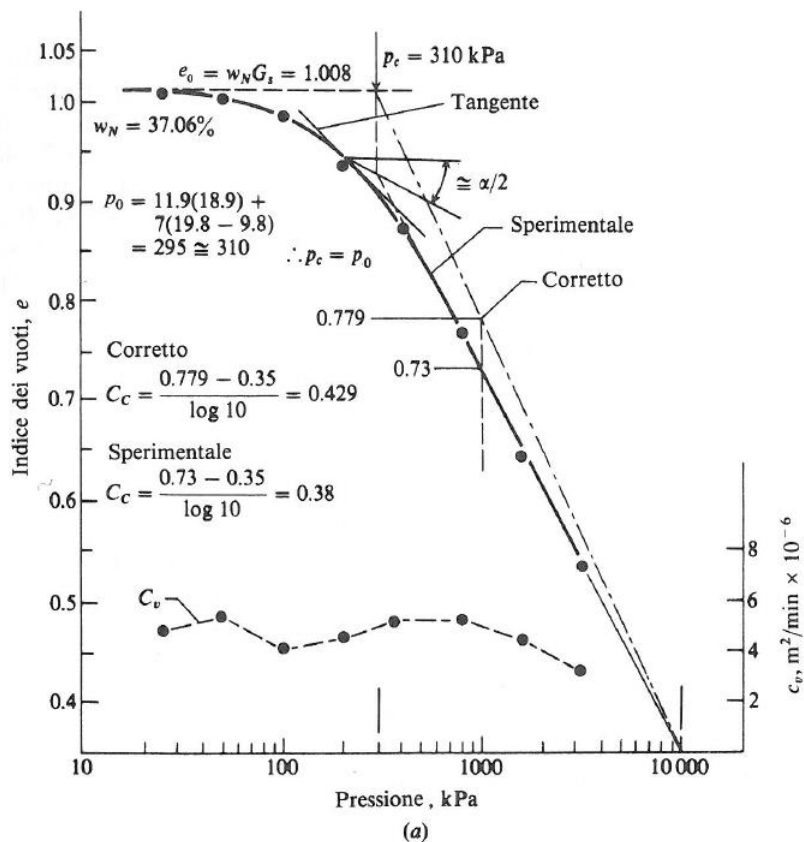


Figura 2.14 Metodi per presentare i valori dei cedimenti per ricavare i parametri C_c e C'_c . Il metodo per correggere i dati relativi a un'argilla normalmente consolidata [Schmertmann (1955)] è mostrato in (a). I dati utilizzati per tracciare entrambe le curve sono mostrati in (b). La lieve discrepanza tra i valori di C'_c è dovuta al disegno.

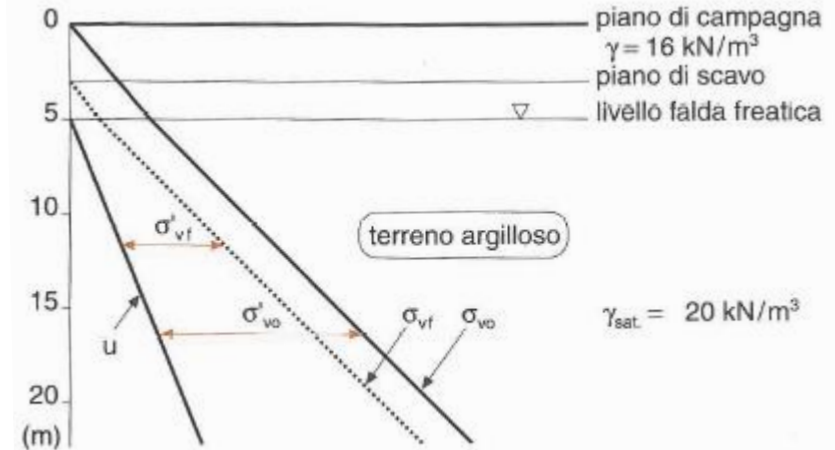
ESERCIZIO 1

Si consideri la situazione del terreno e della falda riportata in figura.
Si calcolino le tensioni totali, effettive e neutrali dal piano campagna alla profondità di 20 m.

Si ripeta poi lo stesso calcolo nel caso in cui venga realizzato uno scavo, planimetricamente abbastanza esteso, fino a 3 m.

Si valuti infine il grado di consolidazione OCR conseguente allo scavo.

Ai fini del calcolo si assumono i seguenti pesi di volume: $\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$ e $\gamma_{\text{sat}} = 20 \text{ kN/m}^3$.



Soluzione

Prof. (m)	σ_{vo} (kPa)	σ_{vf} (kPa)	u (kPa)	σ'_{vo} (kPa)	σ'_{vf} (kPa)	$\text{OCR} = \frac{\sigma'_{v0}}{\sigma'_{vf}}$
3	48	/	/	48	/	/
5	80	32	/	80	32	2,5
10	180	132	50	130	82	1,59
15	280	232	100	180	132	1,36
20	380	332	150	230	182	1,26

ESERCIZIO 2

FIGURA 3.2
Esempio di calcolo delle
tensioni geostatiche.

Con riferimento al profilo stratigrafico illustrato in figura 3.2, determinare l'andamento con la profondità delle tensioni geostatiche efficaci.

■ Il livello di falda è all'interfaccia tra il primo e il secondo strato, per cui nel punto A la tensione verticale totale e efficace coincidono, essendo nulla la pressione dell'acqua. Si avrà pertanto

$$\sigma_{v0} = \sigma'_{v0} = \gamma_d z = 1,5 \cdot 9,81 \cdot 3 = 44,15 \text{ kN/m}^2$$

Nel punto B occorrerà invece tener conto della pressione dell'acqua in regime idrostatico e distinguere tra tensione totale e tensione efficace

$$\sigma_{v0} = \sum \gamma_i \Delta z_i = 14,72 \cdot 3 + 18,65 \cdot 5 = 137,36 \text{ kN/m}^2$$

$$u_0 = \gamma_w z = 1 \cdot 9,81 \cdot 5 = 49,05 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_{v0} = \sigma_{v0} - u_0 = 137,36 - 49,05 = 88,31 \text{ kN/m}^2$$

Analogamente in C si avrà:

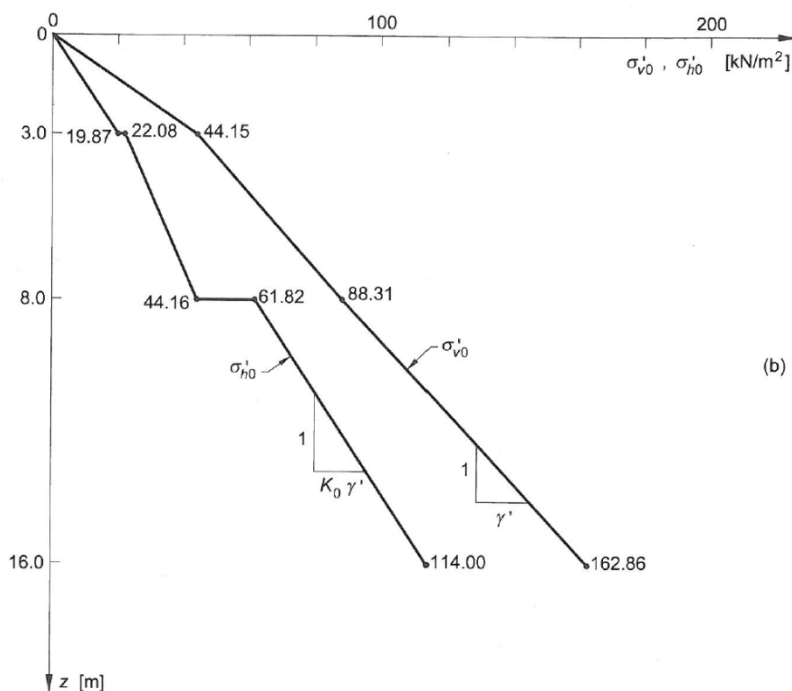
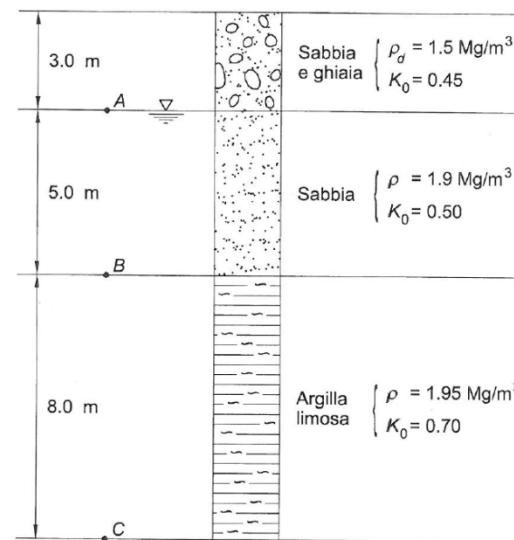
$$\sigma_{v0} = 290,39 \text{ kN/m}^2$$

$$u_0 = 127,53 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_{v0} = 162,86 \text{ kN/m}^2$$

Utilizzando la relazione (3.7) e i dati relativi al coefficiente di spinta a riposo K_0 indicati in figura 3.2.a, si ottengono infine i valori della tensione orizzontale efficace diagrammati in figura 3.2.b.

Si osservi che la tensione verticale risulta continua all'interfaccia tra due strati, mentre può essere discontinua la sua derivata se il peso di volume cambia passando da uno strato all'altro. Al contrario, la tensione orizzontale può risultare discontinua all'interfaccia, se il coefficiente di spinta a riposo cambia nel passaggio da uno strato a quello adiacente, perché tale discontinuità non viola le condizioni di equilibrio.



ESERCIZIO 3

In fig. E3.1 sono illustrate tre condizioni in cui, nel tempo, si è venuto a trovare un deposito di terreno:

- fase 0: condizione iniziale, con livello di falda coincidente con il piano campagna;
- fase A: abbassamento della falda fino a -3 m dal p.c.;
- fase B: erosione con piano campagna nuovamente coincidente con il livello della falda;
- fase C: applicazione di un sovraccarico uniformemente distribuito (tale cioè da assicurare condizioni di compressione mono-dimensionale) sul p.c., di intensità $q=60 \text{ kN/m}^2$.

Si vogliono valutare le tensioni efficaci verticali ed orizzontali, nelle diverse condizioni, a tre quote, a partire dal p.c. originario: 1) $z_1 = 5 \text{ m}$; 2) $z_2 = 10 \text{ m}$; 3) $z_3 = 20 \text{ m}$.

Il terreno è inizialmente NC e caratterizzato dai seguenti parametri:

- $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ (peso unità di volume terreno saturo)
- $\gamma_d = 15 \text{ kN/m}^3$ (peso unità di volume terreno secco)
- $\phi' = 30^\circ$ (angolo di resistenza al taglio)

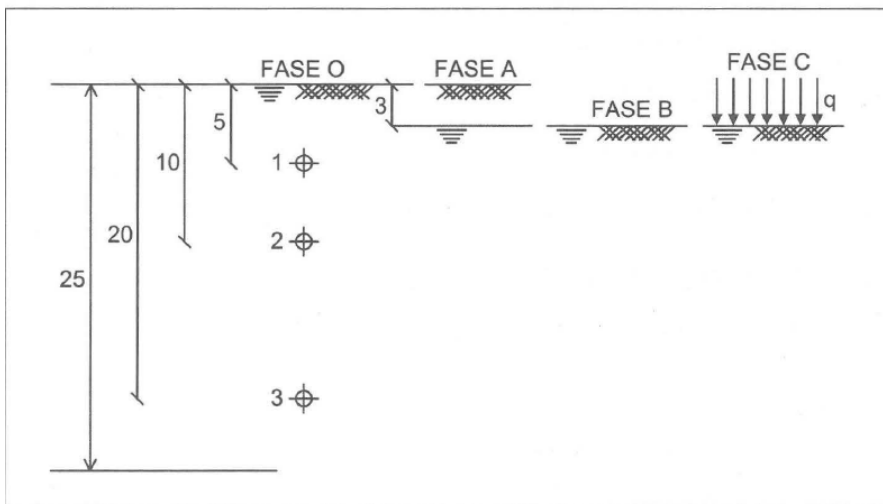


Fig. E3.1 Schema di riferimento

Per un elemento di terreno, alla quota z_1 risulta:

⇒ FASE 0:

$$\sigma_{vo} = \gamma \cdot z_1 = 95 \text{ kN/m}^2$$

$$u = \gamma_w \cdot z_w = \gamma_w \cdot z_1 = 50 \text{ kN/m}^2 \quad (\gamma_w \cong 10 \text{ kN/m}^3)$$

$$\sigma'_{vo} = \sigma_{vo} - u = (\gamma - \gamma_w) \cdot z_1 = \gamma' \cdot z_1 = 45 \text{ kN/m}^2$$

$$OCR = 1$$

$$K_0 = 1 - \sin \phi' = 0.5$$

$$\sigma'_{ho} = K_0 \cdot \sigma'_{vo} = 22.5 \text{ kN/m}^2$$

⇒ FASE A:

$$\sigma_{vo} = \gamma_d \cdot h + \gamma(z_1 - h) = 83 \text{ kN/m}^2$$

$$u = \gamma_w \cdot (z_1 - h) = 20 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_{vo} = \sigma_{vo} - u = 63 \text{ kN/m}^2$$

$$OCR = \frac{63}{63} = 1$$

$$K_0 = 1 - \sin \phi' = 0.5$$

$$\sigma'_{ho} = K_0 \cdot \sigma'_{vo} = 31.5 \text{ kN/m}^2$$

⇒ FASE B:

$$\sigma_{vo} = \gamma(z_1 - h) = 38 \text{ kN/m}^2$$

$$u = \gamma_w \cdot (z_1 - h) = 20 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_{vo} = \sigma_{vo} - u = 18 \text{ kN/m}^2$$

$$OCR = \frac{63}{18} = 3.50$$

$$K_0 \cong (1 - \sin \phi') \sqrt{OCR} = 0.94$$

$$\sigma'_{ho} = K_0 \cdot \sigma'_{vo} = 16.8 \text{ kN/m}^2$$

⇒ FASE C:

$$\sigma_{vo} = \gamma(z_1 - h) + q = 98 \text{ kN/m}^2$$

$$u = \gamma_w \cdot (z_1 - h) = 20 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_{vo} = \sigma_{vo} - u = 78 \text{ kN/m}^2$$

$$OCR = \frac{78}{78} = 1$$

$$K_0 \cong (1 - \sin \phi') = 0.5$$

$$\sigma'_{ho} = K_0 \cdot \sigma'_{vo} = 39 \text{ kN/m}^2$$

Si riportano in tabella i risultati numerici completi. L'esempio numerico mostra quanto schematicamente è stato illustrato precedentemente (cfr. fig. 3.17).

Fase	O			A			B			C		
<i>prof.</i>	<i>z₁</i>	<i>z₂</i>	<i>z₃</i>	<i>z₁</i>	<i>z₂</i>	<i>z₃</i>	<i>z₁</i>	<i>z₂</i>	<i>z₃</i>	<i>z₁</i>	<i>z₂</i>	<i>z₃</i>
σ_{vo}	95	190	380	83	178	368	38	133	323	98	193	383
<i>u</i>	50	100	200	20	70	170	20	70	170	20	70	170
σ'_{vo}	45	90	180	63	108	198	18	63	153	78	123	213
<i>OCR</i>	1	1	1	1	1	1	3.50	1.71	1.29	1	1	1
K_0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.94	0.65	0.57	0.5	0.5	0.5
σ'_{ho}	22.5	45	90	31.5	54	99	16.8	41.2	86.9	39	61.5	106.5

(Tensioni in kN/m²)

È inoltre possibile osservare:

- tra la fase O e la fase A (abbassamento di falda), nonostante le tensioni totali verticali diminuiscano, quelle efficaci aumentano;
- nel caso di processi di preconsolidazione meccanica, come quelli dell'esempio, il rapporto di preconsolidazione *OCR* tende a diminuire con la profondità, tendendo al valore unitario. Uno scarico tensionale, cioè, fa risentire maggiormente i suoi effetti verso la superficie del deposito, ove le tensioni verticali efficaci sono modeste e le piccole riduzioni dovute allo scarico inducono effetti di preconsolidazione più significative rispetto alle profondità maggiori;
- nell'esempio si è assunto che l'applicazione del sovraccarico uniformemente distribuito influenzi le sole tensioni verticali totali (e quindi le efficaci). Tale assunzione semplicistica costituisce un aspetto di criticità nella Meccanica delle Terre, che verrà affrontato

ESERCIZIO 4

Valutare l'andamento delle tensioni verticali ed orizzontali efficaci, al variare della profondità, nel deposito di terreno di cui si riportano stratigrafia e parametri in fig. E3.2(a).

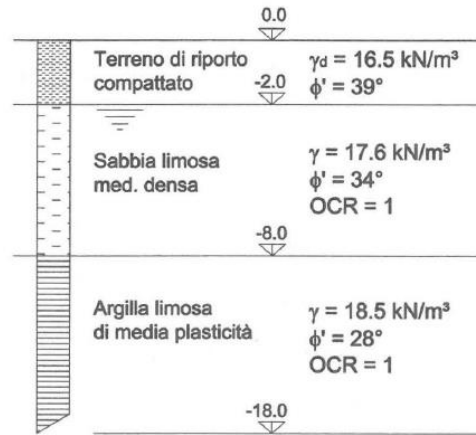


Fig. E3.2 (a) Sezione stratigrafica

Le tensioni verticali ed orizzontali efficaci si valutano alle profondità corrispondenti ai passaggi di strato (all'interno di ogni singolo strato le tensioni variano linearmente). Le profondità di calcolo risultano quindi:

$$z = 0 - 2 - 8 - 18 \text{ m dal p.c.}$$

Per le tensioni verticali efficaci σ'_v si utilizzano le eq. (3.12), (3.14), (3.15) e (3.19); per le tensioni orizzontali efficaci σ'_h le (3.30) e (3.32).

Si noti che, in corrispondenza dei passaggi di strato, l'andamento delle tensioni verticali è continuo, mentre quello delle tensioni orizzontali presenta delle discontinuità a causa del diverso valore di K_o (fig. E3.2(b)).

Ad es. alla profondità $z = -8$ m si ha:

$$\sigma_{v0} = (16.5 \cdot 2) + (17.6 \cdot 6) = 138.6 \text{ kN/m}^2$$

$$u = 10 \cdot 6 = 60 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_{v0} = 78.6 \text{ kN/m}^2$$

Quindi:

$$(sabbia) \rightarrow K_0 \cong (1 - \sin 34) = 0.44$$

$$(sabbia) \rightarrow \sigma'_{ho} = 0.44 \cdot 78.6 = 34.6 \text{ kN/m}^2$$

$$(argilla) \rightarrow K_0 \cong (1 - \sin 28) = 0.53$$

$$(argilla) \rightarrow \sigma'_{ho} = 0.53 \cdot 78.6 = 41.7 \text{ kN/m}^2$$

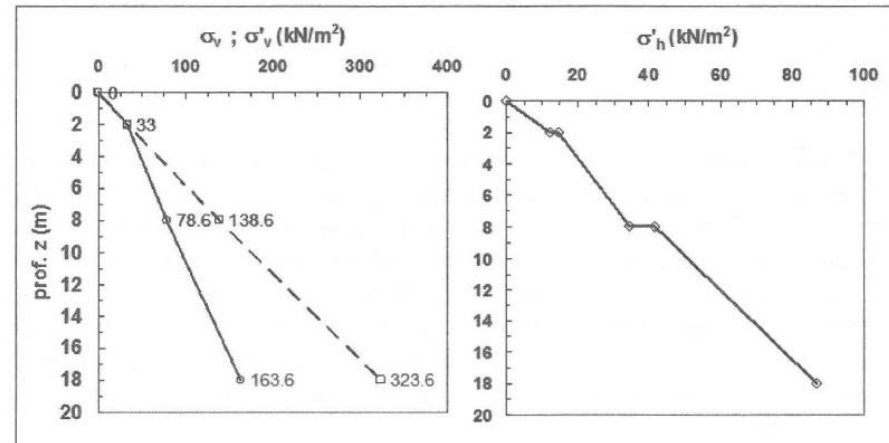


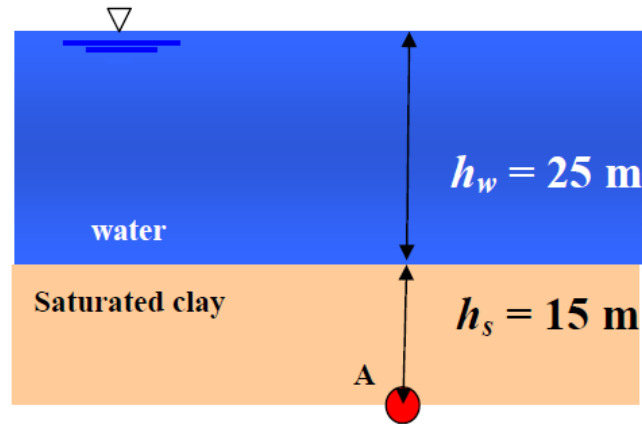
Fig. E3.2 (b) Andamenti delle tensioni con la profondità

ESERCIZIO 4

*Effective Stress–02: The concept of effective stress.

(Revision: Aug-08)

A sample was obtained from point A in the submerged clay layer shown below. It was determined that it had a $w = 54\%$, and a $G_s = 2.78$. What is the effective vertical stress at A?



Solution:

The effective stress σ' at the point A consists solely of the depth of the soil (not of the water) multiplied by the soil buoyant unit weight.

$$\sigma' = \gamma' h_{soil} \quad \text{where} \quad \gamma' = \gamma_b = \gamma_{SAT} - \gamma_w$$

In order to find γ' there are a number of derivations, such as this one,

$$\gamma' = \left[\frac{(G_s + e) \gamma_w}{1 + e} \right] - \gamma_w \quad \text{where the voids ratio } e \text{ can be found through } Se = wG_s$$

and noticing that $S = 1$ because the soil is 100% saturated, $e = wG_s = (0.54)(2.78)$

$$\sigma' = \gamma' h_{soil} = \left\{ \left[\frac{(G_s + e) \gamma_w}{1 + e} \right] - \gamma_w \right\} h_{soil} = \left[\frac{[2.78 + (0.54)(2.78)](9.81)}{1 + (0.54)(2.78)} - 9.81 \right] (15m)$$

$$\sigma' = 105 \text{ kPa}$$

***Effective Stress–03: The concept of effective stress with multiple strata.**

(Revision: Aug-08)

The City of Houston, Texas has been experiencing a rapid lowering of its phreatic surface (draw-downs) during the past 49 years due to large volumes of water pumped out of the ground by industrial users.

- a) What was the effective vertical stress at a depth of 15 m in 1960?
- b) What is the effective stress at the same depth in 2009?
- c) What happens to the ground surface as a result of the draw-downs?

Solution:

a)

$$\sigma'_v = [\gamma h + \gamma' h']_{SAND} + [\gamma' h']_{SILT} + [\gamma' h']_{CLAY} \quad \text{where} \quad \gamma' = \gamma_{SAT} - \gamma_w$$

$$\sigma'_v = [(20.4)(3) + (18.8 - 9.81)(3)] + [(14.9 - 9.81)(6)] + [(12.6 - 9.81)(3)]$$

$$\sigma'_v = 128 \text{ kPa}$$

b) $\sigma'_v = [(20.4)(6) + (16.5)(6)] + [(12.6 - 9.81)(3)] = 230 \text{ kPa}$

This is an 80% increase in stress due solely to a dropping water table.

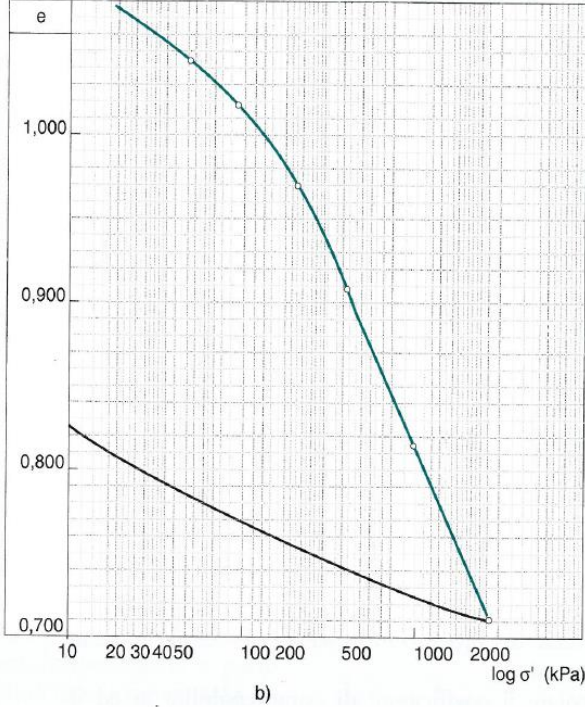
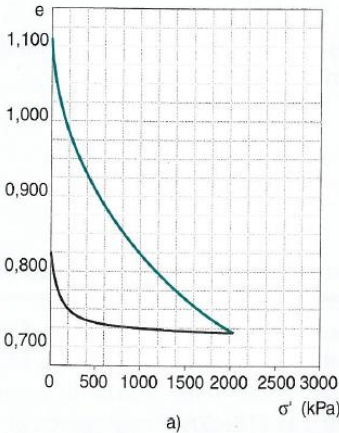
c) The ground surface has also been lowered, due to the decreasing thickness of the sand and the silt strata due to their loss of the volume previously occupied by the water.

ESERCIZIO 5

Un campione di argilla con $w = 35\%$, $w_L = 40\%$, $w_p = 25\%$ viene sottoposto alla prova edometrica; i risultati di tale prova sono riportati nei diagrammi $e-\sigma'$; per il carico di 500 kPa in diagramma sono riportate le altezze del provino in funzione del tempo in scala logaritmica.

Calcolare il coefficiente di compressibilità a_v ed il coefficiente di compressibilità di volume m_v per l'intervallo di pressione da 450 a 550 kPa, l'indice di compressibilità C_c , il coefficiente di consolidazione c_v , il coefficiente di permeabilità k .

Pressione σ' (kPa)	Indice dei vuoti (e)	Contenuto in acqua iniziale w_i %	36,5
		Contenuto in acqua finale w_f %	29,5
0	1,107	$c_v = 3,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	
50	1,046		
100	1,019		
250	0,971		
500	0,909		
1000	0,815	con $\sigma' = 500 \text{ kPa}$	
2000	0,716		
1000	0,724		
250	0,749		
10	0,827		



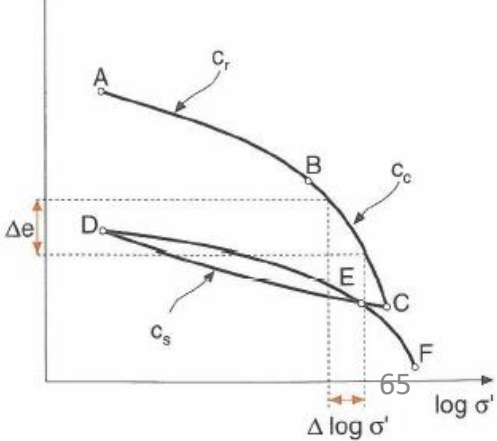
Sapendo che: $a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'}$ risulta: $a_v = \frac{0.916 - 0.894}{550 - 450} = 2.2 \cdot 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$

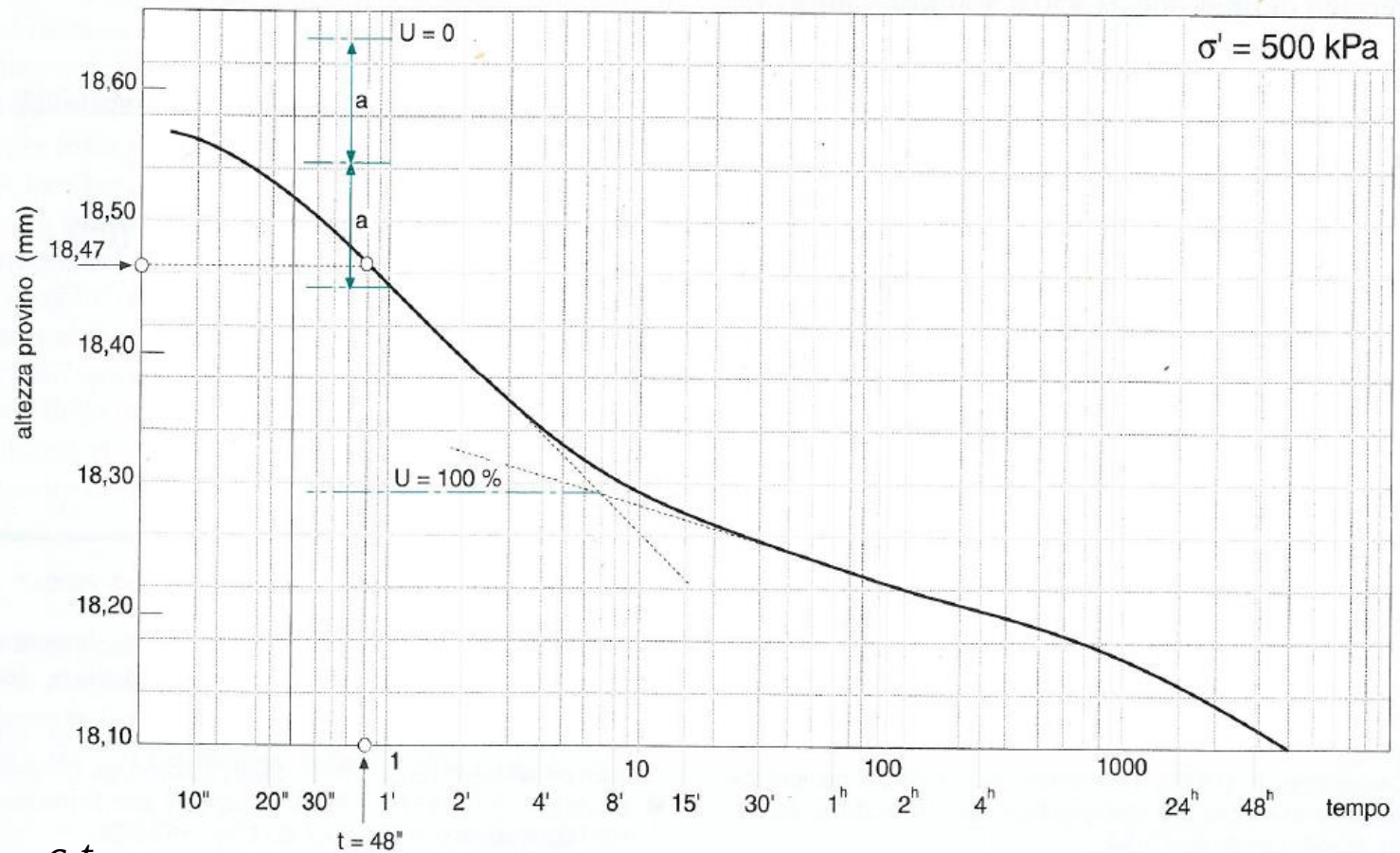
$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0}$$

Il coefficiente di compressibilità m_v è: $m_v = \frac{2.2 \cdot 10^{-4}}{1 + 0.916} = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$

Per il calcolo dell'indice di compressibilità si ottiene: $C_c = \frac{0.815 - 0.716}{\log \frac{2000}{1000}} = 0.33$

che rappresenta la pendenza della curva $e-\log \sigma'$ nel suo tratto terminale di compressione.





$$T_v = \frac{c_v t}{H^2}$$

c)

Il coefficiente di consolidazione c_v dal diagramma risulta: $c_v = \frac{0.197(18.47/2)^2}{48} = 0.35 \text{ mm}^2 / \text{s} = 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$

$$k = c_v \gamma_w m_v$$

Il coefficiente di permeabilità risulta: $k = (3.5 \cdot 10^{-7}) \cdot (9.81) \cdot (1.1 \cdot 10^{-4}) = 3.8 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}$

ESERCIZIO 6

3.5. — Su uno strato di argilla caratterizzato da una permeabilità $k = 10^{-7} \text{ cm/s}$, da un indice di vuoti iniziale $e_0 = 1,5$ dal coefficiente di compressibilità $a_v = 3 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{Kg}$ e da uno spessore $H = 9 \text{ m}$, viene ad agire un sovraccarico.

Si vuol conoscere il tempo necessario per avere una consolidazione del 70% nello strato di argilla.

Si tenga presente che lo strato di argilla in esame è drenato su entrambe le facce.

Nelle condizioni poste, si ha, dal diagramma del Terzaghi di fig. 3.5, che per $U = 70\%$

$$T_v \cong 0.40$$

Si sa che

$$C_v = \frac{(1 + e_0) k}{\gamma_a \cdot a_v}$$

da cui si ha che:

$$C_v = \frac{(1 + e_0) k}{a_v \cdot \gamma_a} = \frac{2.5 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0,833 \cdot 10^{-3} \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

$$\frac{H}{2} = 450 \text{ cm}$$

$$C_v = \frac{(H/2)^2 \cdot T_v}{t}$$

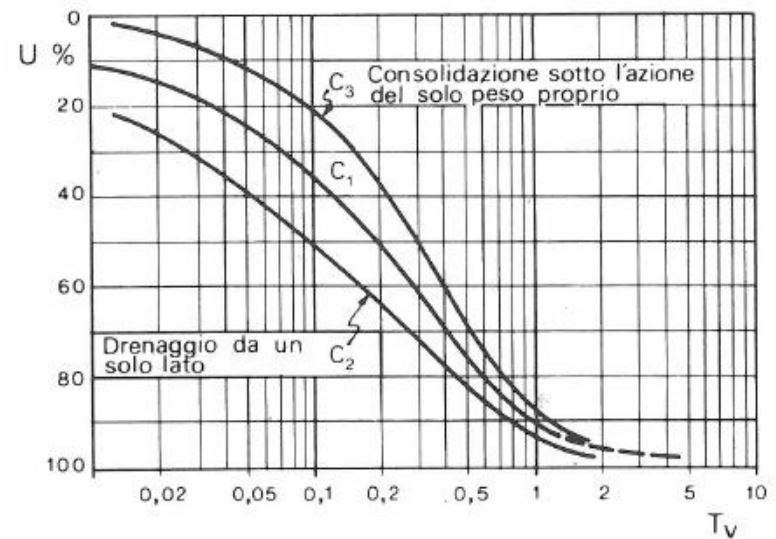


FIGURA 3.5 — Relazione tra U e T_v per campione drenato su entrambe le facce orizzontali.

da cui:

$$t = \frac{(H/2)^2 \cdot T_v}{C_v} = \frac{450^2 \cdot 0,40}{0,833 \cdot 10^{-3}} = 9,7 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$t = \frac{9,7 \cdot 10^7}{8,64 \cdot 10^4} \cong 1123 \text{ giorni} \cong 3 \text{ anni}$$

$$k = c_v \gamma_w m_v$$

m_v è il coefficiente di compressibilità di volume

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0}$$