Sulla derivabilità delle serie di potenze

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie di potenze

con raggio di convergenza $R>0$.

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ la sua derivata formale.

Si vede facilmente che il suo raggio

di convergenza è sempre R.

Ponendo $s_k(z) := \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ si ha

che s_k è derivabile in senso complesso

e $s_k'(z) = \sum_{n=1}^{k} n a_n z^{n-1}$.

Inoltre $\forall\ 0<\rho<R$, si ha che

$s_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ uniformemente su $\overline{D(0,\rho)}$

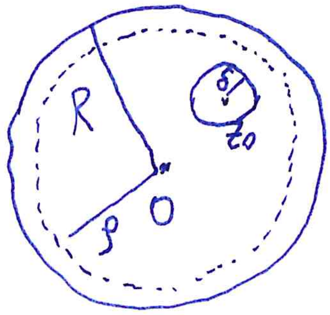
$s_k' \xrightarrow{k\to\infty} g$ uniformemente su $\overline{D(0,\rho)}$

dove $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $z \in D(0,R)$

Dimostreremo ora che f è derivabile

in $D(0,R)$ e $f'(z) = g(z)$ $\forall\ z \in D(0,R)$.

Sia $z_0 \in D(0,R)$; sia $\delta > 0$ t.c. $D(z_0,\delta) \subseteq D(0,R)$ e sia ρ t.c. $|z_0| + \delta < \rho < R$



Sia $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \delta$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha

$$S_n(z_0+h) - S_n(z_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} S_n(z_0+th)\,dt$$

$$= \int_0^1 S_n'(z_0+th)\,h\,dt$$

per $n \to \infty$ si ottiene (grazie alla conv. unif.)

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \int_0^1 g(z_0+th)\,h\,dt$$

e quindi

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = \int_0^1 \big(g(z_0+th) - g(z_0)\big)\,dt$$

dalla continuità di g segue che

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = 0$$

C.V.D.