Analisi complessa – Esercizi – Foglio 1

Esercizio 1. A partire dalla definizione di derivata complessa, dimostrare che la funzione $f(z) = 3ze^{\mathrm{i}z} + |z|^2 + 4$ è derivabile in 0, e determinare $f'(0)$.

Esercizio 2. Sia $f(x+\mathrm{i}y) = (3/2)x^2 - xy + \mathrm{i}xy^2$. Trovare tutti i punti $z = x+\mathrm{i}y$ in cui f è differenziabile in senso complesso, e determinare $f'(z)$ in ciascuno di tali punti.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si assuma che f sia derivabile in senso complesso in 0 e che $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Si calcoli: (i) $\lim_{z\to 0} f(2z)/z$; (ii) $\lim_{z\to 0} f(z^2)/z$; (iii) $\lim_{z\to 0} f(z^2 - z)/z$; (iv) $\lim_{z\to i} f(z^2+1)/(z-i)$.

Esercizio 4. Dimostrare la seguente proposizione: se una funzione olomorfa, definita su un insieme aperto connesso, assume solo valori reali, allora è costante.

Esercizio 5. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/n}(z-1)^n$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n!n^{-n}z^n$.

Esercizio 6. Assumendo note le proprietà elementari della funzione esponenziale e delle funzioni trigonometriche nel campo reale, nonché la formula fondamentale $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dimostrare le seguenti proprietà:

(1) $e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ for $z \in \mathbb{C}$;
(2) $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$ for $z \in \mathbb{C}$;
(3) $\cos(z+2\pi) = \cos z$ e $\sin(z+2\pi) = \sin z$ for $z \in \mathbb{C}$;
(4) $\sin z$ e $\cos z$ ammettono solo zeri reali.