FORMULA DI CAUCHY

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e stellato e sia γ un cammino chiuso in Ω. Sia f olomorfa in Ω. Sia $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Allora

$$\boxed{(FC) \quad f(z) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta}$$

Dimostr.

Definiamo

$$g(\zeta) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{per } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{per } \zeta = z. \end{cases}$$

Allora g è olomorfa in $\Omega \setminus \{z\}$ e continua in Ω. Per il teorema di Cauchy allora $\int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = 0$, cioè la tesi $\boxtimes$

La formula di Cauchy è importante perché il numero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta$$

dipende solo da γ e z e non da f.

Vedremo in seguito che

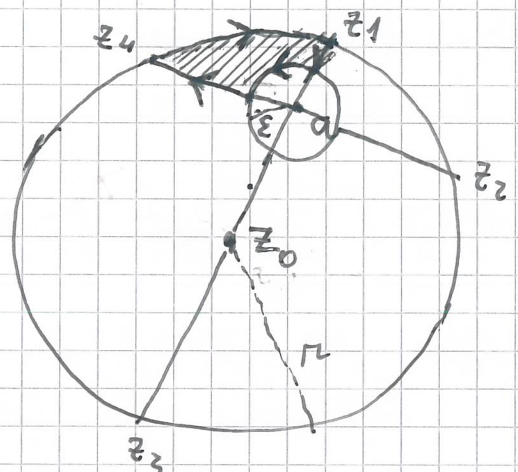
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \in \mathbb{Z}$$

e vedremo che $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ conta

quante volte "γ gira intorno a z".
Per questo motivo $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ si chiama "indice di avvolgimento di γ intorno a z".
Per ora consideriamo il caso particolare in cui γ è una circonferenza.

Consideriamo la circonferenza $C = \{|z - z_0| = r\}$.

Sia $a \in \mathbb{C}$ t.c. $|a - z_0| < r$



Osserviamo che l'integrale di $\frac{1}{\zeta - a}$ è nullo su ciascuno dei 4 cammini (v. figura) grazie al teorema di Cauchy. Segue che

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - a}\, d\zeta = \int_{|\zeta - a| = \varepsilon} \frac{1}{\zeta - a}\, d\zeta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\vartheta}}\, \varepsilon i e^{i\vartheta}\, d\vartheta = 2\pi i$$

e quindi $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - a}\, d\zeta = 1 = \mathrm{Ind}_C(a)$

Se consideriamo un $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in H(\Omega)$ e $D := \{|z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$, e $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z - z_0| < r$, allora

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta}$$

$\longrightarrow$ FORMULA DI CAUCHY PER UN CERCHIO

COROLLARIO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, $D := \{|z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\vartheta}) \, d\vartheta$$

Cioè $f(z_0)$ è il valor medio di f sulla circonferenza $\{|z - z_0| = r\}$.

SVILUPPO IN SERIE DI POTENZE

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, e sia $z_0 \in \Omega$.

Dimostreremo, grazie alla formula di Cauchy, che allora esiste una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

con raggio di convergenza positivo,

tale che

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}$$

in un intorno di z_0. Inoltre

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta}$$

dove r è tale che $\{|\zeta - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$.

La serie di potenze è univocamente determinata, e converge su ogni disco centrato in z_0 e contenuto in Ω. Su tale disco coincide con f.

<u>Dimostrazione</u>

L'unicità dipende dal fatto che, se tale serie esiste, allora $f \in C^\infty$ e necessariamente

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Ora dimostriamo l'esistenza:

Se $\{|\zeta - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$ e $|z - z_0| < r$, allora grazie alla formula di Cauchy abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta$$

Ora osserviamo che $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$

Quindi
$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

Da questo segue che
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]d\zeta$$

(poiché la serie converge assolutamente e uniformemente in $|\zeta-z_0|=r$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)}_{=:c_n}(z-z_0)^n$$ $\boxtimes$

COROLLARIO

Se f è olomorfa, allora $f \in C^\infty$ (in senso complesso e quindi anche reale). $\boxtimes$

STIME DI CAUCHY per i coefficienti di TAYLOR

Sia $f \in H(U)$ e sia $\{|z-z_0| \leq r\} \subseteq U$.

Sia $\max_{|z-z_0|=r}|f(z)| \leq M$.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ lo sviluppo di f in z_0.

Allora $$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \qquad \forall n.$$

Dim.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

$$\Rightarrow \quad |c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \, r \, d\vartheta = \frac{M}{r^n} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA DI LIOUVILLE

Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e limitata. Allora f è costante.

Dim.

Abbiamo $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Inoltre f si sviluppa in serie su tutto $\mathbb{C}$, e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

e

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \qquad \forall r > 0.$$

Facendo tendere $r \to +\infty$, otteniamo

$$c_n = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

Quindi $f(z) \equiv c_0$. $\blacksquare$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ possiede almeno uno zero in $\mathbb{C}$.

Dim.

Sia $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

$n \geq 1$, $a_n \neq 0$.

Allora

$$f(z) = z^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right)$$

e quindi $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$.

Se f non avesse nessuno zero, allora $\frac{1}{f(z)}$ sarebbe olomorfa e limitata su $\mathbb{C}$.

Allora per Liouville sarebbe costante, quindi f stessa sarebbe costante. Assurdo

$\blacksquare$

TEOREMA DI MORERA ("inverso di Cauchy-Goursat")

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Supponiamo che, $\forall$ triangolo $\Delta \subseteq U$, si abbia $\int_{\partial \Delta} f(z)\, dz = 0$.

Allora f è olomorfa.

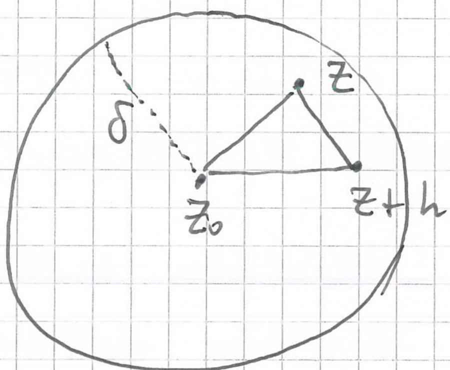
Dim.

Poiché l'olomorfia è una proprietà locale, è sufficiente dimostrare che, $\forall z_0 \in U$, $\exists \quad D = \{ |z - z_0| < \delta \} \subseteq U$ t.c. f sia olomorfa su D.

Sia dunque $z_0 \in U$ e sia $\delta > 0$ t.c. $D = \{ |z - z_0| < \delta \} \subseteq U$.

Definiamo $\quad F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta \quad , \; z \in D$

Dall'ipotesi, segue che $\int_{[z_0, z, z+h]} f(\zeta)\, d\zeta = 0$.



Segue che

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta + \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(z)\, d\zeta$$

$$= f(z) + \underbrace{\frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta}_{\xrightarrow{|h| \to 0} \; 0}$$

Quindi F è olomorfa in D e $F' = f$. Così f è la derivata di una funzione olomorfa, e quindi è essa stessa olomorfa. ▨

Definizione

Sia $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in Ω. Si dice che $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ uniformemente sui compatti di Ω $\Leftrightarrow$ $\forall\, K \subseteq \Omega$ compatto, $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ uniformemente in K.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $f_j \in H(\Omega)$ una successione di funzioni olomorfe, t.c. $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ uniformemente sui compatti di Ω.
Allora $f \in H(\Omega)$ e $f_j' \xrightarrow{j\to\infty} f'$ uniformemente sui compatti di Ω (e quindi $f_j^{(n)} \xrightarrow{j\to\infty} f^{(n)}$ uniformemente sui compatti di Ω $\forall\, n = 1, 2, \dots$).

Dimostrazione

1) convergenza uniforme $\Rightarrow$ f continua.
2) $\forall$ triangolo $\Delta \subseteq \Omega$,

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\int_{\partial\Delta} f_j(z)\,dz}_{=0} = 0$$

e quindi $f \in H(\Omega)$ per il teorema di Morera.

3) Sia $K \subseteq \Omega$ compatto. Allora $\exists\, r>0$ t.c. $K + \overline{B(0,r)} =: E \subseteq \Omega$. Anche E è compatto.

Ora si ha; $\forall\, z \in K$

$$f_j'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f_j(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$

e quindi $\forall\, z \in K$

$$|f_j'(z) - f'(z)| \leq \|f_j - f\|_{L^\infty(E)} \frac{1}{r}$$

Da ciò segue che

$$\|f_j' - f'\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{1}{r} \|f_j - f\|_{L^\infty(E)} \xrightarrow{j \to \infty} 0$$ (per ipotesi).

∎