ZERI DI FUNZIONI OLOMORFE

Sia $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = 0$

Definizione

Se $f'(z_0) \neq 0$ si dice che z_0 è uno zero semplice. In generale, si dice "ordine" di z_0 il più piccolo $k \in \mathbb{N}$ t.c. $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Se $f^{(k)}(z_0) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, si dice che z_0 ha ordine infinito.

Daremo una descrizione di f vicino a un suo zero z_0. In generale, sostituendo $f(z)$ con $f(z) - f(z_0)$, otterremo una descrizione locale del comportamento di f vicino a un qualunque punto del suo dominio.

Caso 1

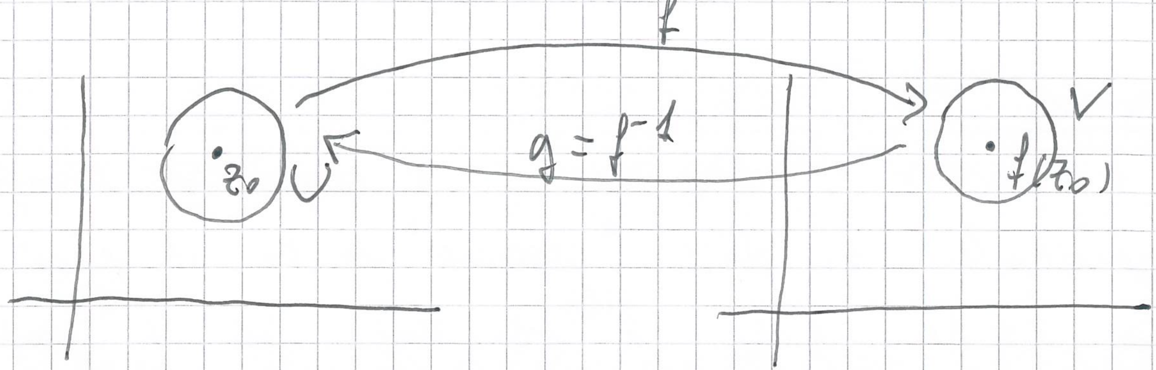
Sia z_0 uno zero semplice di f ($f'(z_0) \neq 0$). Se pensiamo a f come una funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, allora f è differenziabile secondo Fréchet, e il suo Jacobiano in z_0 è della forma

$$Jf(x_0 + iy_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dove $f'(z_0) = a + ib$.

Quindi $\det Jf(z_0) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0$

Possiamo applicare il "teorema della funzione inversa".



Esistono due intorni U di z_0 e V di $f(z_0)$, ed una funzione $g : V \longrightarrow U$ t.c.
$f \circ g = Id_U \qquad g \circ f = Id_V$

g è differenziabile in V e

$$dg(w) = [df(g(w))]^{-1}$$

Si noti che in generale

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}$$

Quindi le derivate parziali di g soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, e quindi $g = f^{-1}$ è olomorfa.

<u>Caso 2</u>

z_0 ha ordine infinito. Allora, poiché f si rappresenta in serie di Taylor in un intorno di z_0, e tutti i suoi coefficienti sono nulli, si ha che $f \equiv 0$ in tale intorno di z_0.

Caso 3

$1 < k < \infty$, dove k è l'ordine di z_0.

Per $k = 1, 2, 3, \ldots$ definiamo $\pi_k(z) := z^k$

studieremo prima in dettaglio questo caso particolare di zero di ordine k.

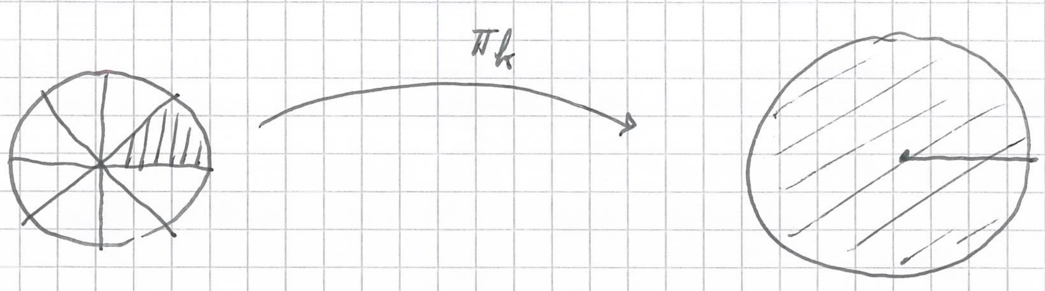
Osserviamo che $\forall\, w \neq 0$, $\pi_k(z) = w$ per esattamente k valori di z.

Infatti, scriviamo $w = re^{i\vartheta}$ con $r > 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Allora $\pi_k(z) = w$

$\Longleftrightarrow$ $z = r^{1/k} e^{i(\vartheta + 2m\pi)/k}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$

Inoltre, si noti che π_k è una "funzione aperta", cioè manda aperti in aperti. Infatti, se A è un aperto che non contiene 0, allora $\pi_k'(z) \neq 0$ $\forall z \in A$ e quindi $\pi_k(A)$ è aperto per il teorema della funzione inversa. Inoltre,

$\pi_k(D(0,r)) = D(0, r^k)$



π_k manda ogni angolo di ampiezza $\frac{2\pi}{k}$ nel piano completo.

Supponiamo ora che h sia olomorfa, con $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$.

Allora $\pi_k \circ h$ ha in z_0 uno zero di ordine k (si vede con lo sviluppo di Taylor).
Vedremo ora che è vero anche l'inverso.

<u>Proposizione</u>
Sia z_0 uno zero di ordine k di f. Allora esiste una funzione olomorfa h, con $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, tale che $f = \pi_k \circ h$ in un intorno di z_0 (i.e. $f(z) = h(z)^k$.).

<u>Dim.</u>
Sviluppando in serie, abbiamo

$$f(z) = (z-z_0)^k \Big(c_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-k} \Big) \qquad c_k \neq 0$$

$$= (z-z_0)^k \, g(z) \qquad\qquad g(z_0) \neq 0 .$$

Allora $g(z) \neq 0$ in un intorno V di z_0

Quindi $\frac{g'}{g}$ è olomorfa in un intorno di z_0. Segue che $\exists\, G$ olomorfa in un intorno di z_0 t.c.

$$G'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Ora si ha:

$$(g e^{-G})' = g' e^{-G} - g G' e^{-G} = g' e^{-G} - g \frac{g'}{g} e^{-G} = 0$$

e quindi $\exists\ \alpha_0 \in \mathbb{C}$ t.c.

$$g e^{-G} \equiv \alpha_0 \quad \text{in un intorno di } z_0.$$

Poiché $\alpha_0 \neq 0$, $\exists\ \beta_0$ t.c. $e^{\beta_0} = \alpha_0$

Sostituendo G con $\tilde{G} = G + \beta_0$, abbiamo

$$g = e^{\tilde{G}}.$$

Ora definiamo $h(z) := (z - z_0)\, e^{\tilde{G}(z)/k}$

Segue che

$$h(z)^k = (z - z_0)^k e^{\tilde{G}(z)} = (z - z_0)^k g(z) = f(z)$$

☒

Come conseguenza abbiamo:

<u>PROPOSIZIONE</u>

Sia z_0 uno zero di ordine k di f.
Allora $\exists\ \varepsilon > 0$ e un intorno V_ε di z_0 t.c.

$$f(V_\varepsilon) = \{ w \mid |w| < \varepsilon \}.$$

$\forall\ w \in \{ w \mid |w| < \varepsilon \}$, $f|_{V_\varepsilon}$ assume il valore w esattamente k volte se $w \neq 0$, e assume il valore 0 solo in 0.

<u>Dim.</u>

L'enunciato è sicuramente vero per $\pi_k(z) = z^k$.

In generale, $f(z) = h(z)^k = \pi_k \circ h(z)$,

con $h(z_0) = 0$ $h'(z_0) \neq 0$.

h è bi-olomorfa (caso 1), cioè

$\exists$ un intorno U di z_0 e un intorno V di 0 t.c.

$$h\big|_U : U \to V \text{ è biiettiva, e}$$

$(h|_U)^{-1} : V \to U$ è olomorfa.

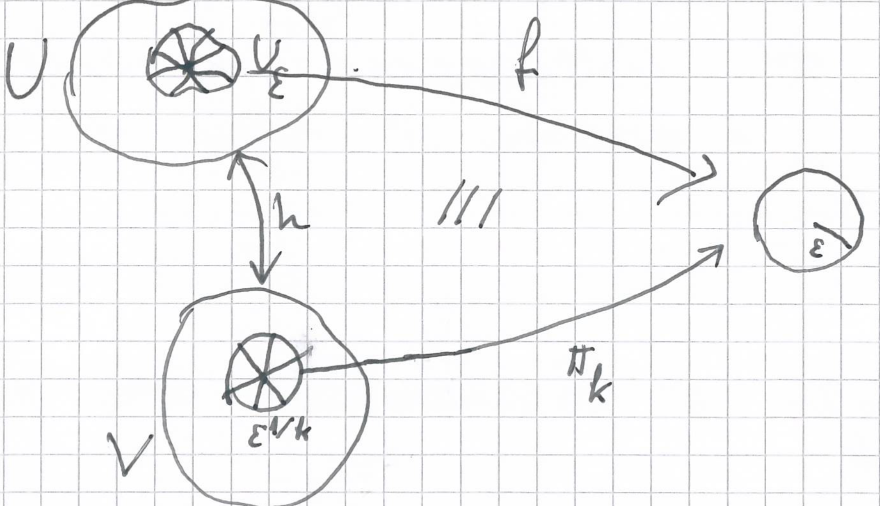
Se $\varepsilon > 0$ è così piccolo che

$$\{\zeta \mid |\zeta| < \varepsilon^{1/k}\} \subseteq V, \text{ allora}$$

$$U_\varepsilon := h^{-1}\left(\{|\zeta| < \varepsilon^{1/k}\}\right) \subseteq U$$

Allora $h : U_\varepsilon \longleftrightarrow \{|\zeta| < \varepsilon^{1/k}\}$ è biolomorfa e

$$f(U_\varepsilon) = (\pi_k \circ h)(U_\varepsilon) = \{|w| < \varepsilon\}$$



$\boxtimes$

LEMMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso. Sia $f \in H(\Omega)$. Sia $M \subseteq \Omega$ l'insieme degli zeri di f di ordine infinito. Allora M è aperto e chiuso in Ω (e quindi o è vuoto o coincide con Ω).

Dim.

M è aperto: lo si vede utilizzando gli sviluppi di Taylor (v. caso 2 a pag. 38).
Dimostriamo che $\Omega \setminus M$ è aperto.
Sia $z_0 \in \Omega \setminus M$. Allora ci sono due possibilità.

(i) $f(z_0) \neq 0$. Allora $f(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 perché f è continua. Tale intorno quindi è contenuto in $\Omega \setminus M$.

(ii) $f(z_0) = 0$ e z_0 è uno zero di ordine $k < \infty$, e allora $f(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 per la proposizione precedente. Tale intorno è quindi contenuto in $\Omega \setminus M$. ☒

COROLLARIO 1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, e sia $f \in H(\Omega)$ non costante. Allora f è aperta.

Dim.

Per il lemma precedente, se f è non costante, allora $\forall\, w_0 \in \mathbb{C}$, $f - w_0$ non può avere uno zero di ordine infinito. Allora, se $w_0 \in f(\Omega)$, $\exists\, z_0 \in \Omega$ t.c. $f(z_0) = w_0$ e z_0 è uno zero di ordine finito di $f - w_0$. Segue allora dalla proposizione a pag. 41 che $\exists\, \varepsilon > 0$ e V_ε t.c.

$$f(V_\varepsilon) = \{ w \mid |w - w_0| < \varepsilon \}.$$

Quindi $f(\Omega)$ è aperto. $\blacksquare$

COROLLARIO 2

Sia Ω aperto e connesso. Sia $f \in H(\Omega)$ iniettiva. Allora $f'(z) \neq 0$ $\forall z$ e f^{-1} è olomorfa. Inoltre

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \qquad \blacksquare$$

COROLLARIO 3

Sia Ω aperto e connesso. Sia $f \in H(\Omega)$ e sia N l'insieme degli zeri di f. Se N ha punti di accumulazione <u>in Ω</u>, allora $f \equiv 0$

Dim.

Se z_0 è un punto di accumulazione

di N in Ω, allora $f(z_0)=0$ (per la continuità di f), e z_0 ha ordine infinito (gli zeri di ordine finito sono isolati).

Allora $\mathcal{U} \neq \emptyset$ e quindi, per il lemma a pag. 43, $\mathcal{U} = \Omega$. ▨

ESEMPI

IL PRINCIPIO DEL MASSIMO

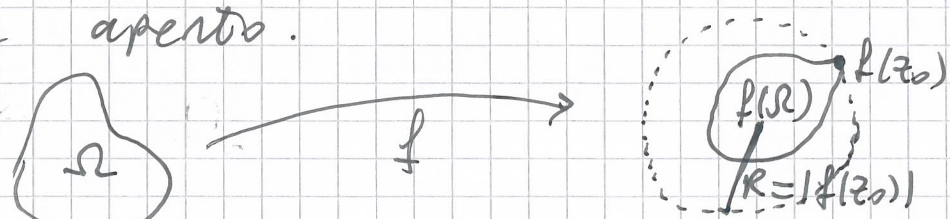
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso. Sia $f \in H(\Omega)$ non costante. Allora la funzione $z \mapsto |f(z)|$ non ha massimo in Ω.

Dim.

Se $z_0 \in \Omega$ è tale che $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ $\forall z$, poniamo $R := |f(z_0)|$. Allora

$$f(z) \in \overline{D(0,R)} \quad \forall\, z \in \Omega$$

e $f(z_0) \in \partial\, \overline{D(0,R)}$, e quindi $f(\Omega)$ non può contenere un intorno di $f(z_0)$. Questo contraddice il fatto che $f(\Omega)$ sia aperto.



▨

COROLLARIO

Se Ω è limitato e $f \in C(\bar{\Omega}) \cap H(\Omega)$, allora $\| |f| \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = \| |f| \|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ $\boxtimes$

CONTROESEMPIO

Il corollario precedente non vale se Ω non è limitato. Infatti

sia $\Omega := \{ z = x + iy \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \}$

$f(z) = \exp(\exp(z))$.

Si ha

$f(x \pm \frac{\pi i}{2}) = \exp(\pm i e^x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

e quindi $|f(z)| = 1 \quad \forall\, z \in \partial\Omega$

ma $f(x) = e^{e^x} \longrightarrow +\infty$ per $x \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$.

e quindi f è illimitata in Ω.

UN' APPLICAZIONE: IL LEMMA DI SCHWARTZ

Sia $f : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, con $f(0) = 0$ $f(z) \in D(0,1)$ $\forall z$.

Allora $|f'(0)| \leq 1$ e $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z$.

Inoltre, se $|f'(0)| = 1$ oppure $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \neq 0$, allora $\exists\ \vartheta \in \mathbb{R}$ t.c. $f(z) = e^{i\vartheta} z$, cioè f è una rotazione.

<u>Dim.</u>

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z\, g(z)$$

g olomorfa, e $g(0) = f'(0) = c_1$.

Se $|z| = r < 1$, allora

$$\begin{cases} |f(z)| = |z|\,|g(z)| = r\,|g(z)| \\ < 1 \end{cases}$$

e quindi $|g(z)| < \dfrac{1}{r}$ $\forall\ z$ con $|z| = r$

Per il principio del massimo,

$$|g(z)| < \frac{1}{r} \quad \forall\ z \text{ con } |z| \leq r$$

Segue che

$$|g(z)| \leq 1 \quad \forall\ z \text{ con } |z| < 1$$

Quindi

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall\ z \quad \text{e} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Ora, se $|f'(0)| = 1$ o se $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0 \neq 0$, abbiamo che

$$|g(z_0)| = 1 \quad \text{per qualche } z_0 \in D(0,1)$$

Allora, per il principio del massimo, g deve essere costante. Quindi $g(z) \equiv e^{i\vartheta}$ per qualche $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Pertanto, $f(z) = z e^{i\vartheta}$ $\forall z$. ▨