ANALISI COMPLESSA – Esercizi – Foglio 3

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che $f(\mathbb{C})$ è denso in $\mathbb{C}$.

Esercizio 2 Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano c e r due costanti positive. Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $|f(z)| \leq c|z|^n$ per tutti gli $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r$. Dimostrare che allora f è un polinomio di grado al massimo n.

Esercizio 3 Sia z_0 uno zero della funzione olomorfa f. Dimostrare la seguente proposizione: f ammette una radice k-esima (cioè una funzione olomorfa g tale che $[g(z)]^k \equiv f(z)$) in un intorno di z_0, se se solo se k è un divisore dell'ordine di z_0.

Esercizio 4. Sia $U_0 \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e sia $f_0: U_0 \to \mathbb{R}$ una funzione analitica (cioè per ogni punto $x_0 \in U_0$ esiste un intervallo centrato in x_0 in cui f_0 può essere sviluppata in serie di potenze). Dimostrare che allora esistono un insieme aperto $U \subset \mathbb{C}$, con $U \cap \mathbb{R} = U_0$, e una funzione olomorfa $f: U \to \mathbb{C}$, tale che $f|_{U_0} \equiv f_0$.

Esercizio 5. Utilizzando il Lemma di Schwartz, dimostrare che ogni funzione bi-olomorfa $f: D(0,1) \to D(0,1)$, che mantiene 0 fisso, è una rotazione.

Esercizio 6. Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{C}$ e sia K un sottoinsieme compatto di Ω con interno non vuoto $\dot{K}$. Utilizzando il principio del massimo, dimostrare la seguente proposizione: se una funzione olomorfa non costante $f: \Omega \to \mathbb{C}$ è tale che $|f|$ sia costante su ∂K, allora f ha uno zero in K.