CALCOLO DEI RESIDUI

Vedremo come il teorema dei residui può essere utilizzato per calcolare integrali impropri di funzioni reali in $\mathbb{R}$, $[0,+\infty[$ oppure in un intervallo.

Cominciamo con due osservazioni:

Osservazione 1

Quando parliamo di comportamento di $f(z)$ a ∞, intendiamo il comportamento di $f(1/z)$ in 0.

Osservazione 2

Se f ha in z_0 un polo di ordine al più k, allora

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big|_{z_0} (z-z_0)^k f(z)$$

In particolare, se $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ e h ha in z_0 uno zero semplice, allora

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (*)$$

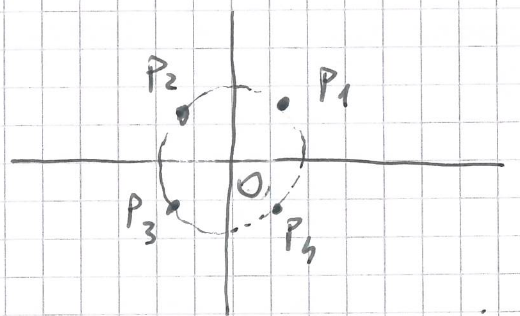
Cominciamo con un esempio.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx$$

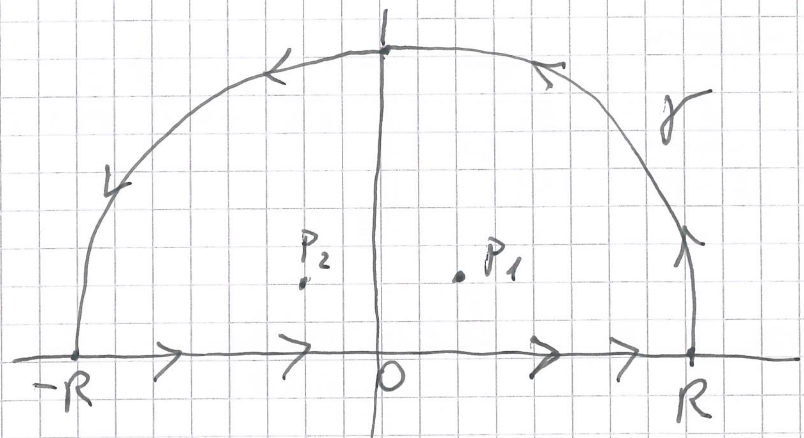
Consideriamo la funzione $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$.

Questa funzione ha poli in

$$e^{(\pi/4 + k\pi/2)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$



Scegliamo un cammino fatto così:



Allora si ha

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left(Res(f, P_1) + Res(f, P_2) \right)$$

ove

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{\pi} \frac{i R e^{i\vartheta}}{1+R^4 e^{4i\vartheta}}\, d\vartheta$$

L'idea è di far tendere R a $+\infty$.
Osserviamo che

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}}\, d\theta \right| \leq \frac{R}{R^4-1}\,\pi \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \Big(Res(f, P_1) + Res(f, P_2) \Big)$$

Calcoliamo quindi grazie a $(*)$

$$Res(f, P_1) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$Res(f, P_2) = \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4}\, e^{-\frac{9}{4}\pi i} = \frac{1}{4}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$

Allora

$$2\pi i \Big(Res(f, P_1) + Res(f, P_2) \Big) =$$

$$= \frac{2\pi i}{4} \left(\cancel{\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + \cancel{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)} + i\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4} \cdot 2\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, (-i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Abbiamo il seguente teorema generale.

TEOREMA 1

Sia $R(x)$ una funzione razionale. Assumiamo che $R(z)$ non abbia poli sull'asse reale. Inoltre, assumiamo che $R(z)$ abbia a ∞ uno zero almeno di ordine 2. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{\alpha \text{ polo} \\ \operatorname{Im}\alpha > 0}} \operatorname{Res}(R,\alpha).$$

Dimostrazione

Si ripete il ragionamento dell'esempio precedente, osservando che

$$\left| \int_0^{\pi} R(\rho e^{i\theta})\, \rho i e^{i\theta} \right| \leq \frac{K}{\rho} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0 \qquad \blacksquare$$

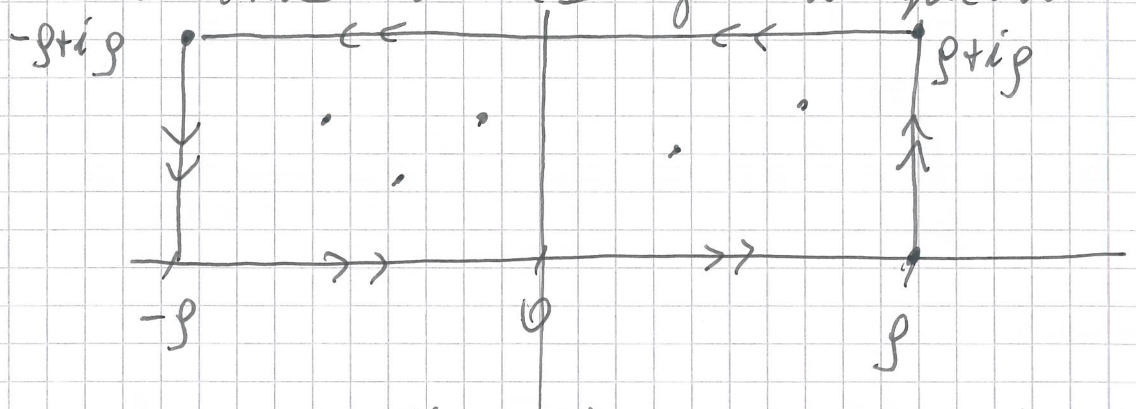
Ora vogliamo integrare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos x \, dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x \, dx$$

dove $R(x)$ è una funzione razionale, senza poli sull'asse reale, e con $R(\infty) = 0$.

N.B. se R ha in ∞ uno zero solo di ordine 1, la funzione non è sommabile secondo Lebesgue, perché non è assolutamente sommabile. In tal caso l'integrale è analogo a una serie armonica a segni alterni.

Innanzitutto osserviamo che R ha solo un numero finito di poli. Prendiamo un cammino chiuso γ in questo modo



Se ρ è sufficientemente grande tutti i poli con parte immaginaria positiva si trovano all'interno di γ. Segue che

$$\int_\gamma R(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\alpha \text{ polo di } R \\ \operatorname{Im}\alpha > 0}} \operatorname{Res}\left(R(z)e^{iz}, \alpha\right)$$

Poniamo $s_\rho := \sup_{|z|\geq\rho} |R(z)|$. Allora $\lim_{\rho\to\infty} s_\rho = 0$. Ora abbiamo:

$$\left|\int_{[\rho,\rho+i\rho]} R(z)e^{iz}\,dz\right| = \left|\int_0^\rho R(\rho+it)\,e^{i(\rho+it)}\,i\,dt\right|$$

$$\leq s_\rho \int_0^\rho e^{-t}\,dt \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} 0$$

$$\left| \int_{[-\rho+i\rho,\rho]} R(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^\rho R(-\rho + i\rho - it) e^{i(-\rho+i\rho-it)} (-i)\, dt \right|$$

$$\leq S_\rho e^{-\rho} \int_0^\rho e^t dt = S_\rho (e^\rho - 1) e^{-\rho} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

e infine

$$\left| \int_{[\rho+i\rho,-\rho+i\rho]} R(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_0^{2\rho} R(-\rho + t + i\rho) e^{i(-\rho+t+i\rho)} dt \right|$$

$$\leq S_\rho \int_0^{2\rho} e^{-\rho} dt = S_\rho e^{-\rho} 2\rho \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\alpha \text{ polo} \\ \operatorname{Im}\alpha > 0}} \operatorname{Res}(R(z) e^{iz}, \alpha)$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema:

<u>TEOREMA 2</u>

Sia $R(x)$ una funzione razionale reale. Si assuma che $R(z)$ non abbia poli sull'asse reale. Inoltre, si assuma che $R(\infty) = 0$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\alpha \text{ polo di } R \\ \operatorname{Im}\alpha > 0}} \operatorname{Res}(R(z) e^{iz}, \alpha).$$

$\blacksquare$

Ora consideriamo una funzione razionale reale $R(x,y)$ delle due variabili reali x e y. Vogliamo calcolare

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta.$$

Assumiamo che $R(x,y) \neq 0$ per $x^2+y^2=1$

Ricordiamo che $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$, $\sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$

Si ha quindi

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta = -i\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\vartheta}} R\left(\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}, \frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}\right) ie^{i\vartheta} d\vartheta$$

$$= -i\int_{|z|=1} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) dz$$

$$= 2\pi \sum_{\substack{|\alpha|<1 \\ \alpha \text{ polo}}} \operatorname{Res}(f,\alpha)$$

dove

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

Illustriamo questo risultato con un esempio.

ESEMPIO

Sia $a>1$. Vogliamo calcolare

$$\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta}$$

Abbiamo

$$\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}}\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{i\vartheta}} \frac{1}{a+\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}}\, ie^{i\vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a+\frac{z+1/z}{2}}\, dz$$

Dobbiamo quindi considerare la funzione

$$\frac{1}{z}\ \frac{2}{2a+z+\frac{1}{z}} = \frac{2}{2az+z^2+1}$$

Questa funzione ha due poli

$$z_1 = -a-\sqrt{a^2-1} \qquad z_2 = -a+\sqrt{a^2-1}$$

Si ha $|z_2| < 0$, $|z_1| > 0$.

Pertanto

$$\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{a+\cos\vartheta} = \pi \operatorname{Res}\left(\frac{2}{2az+z^2+1}, \ z_2\right)$$

$$= \pi\ \frac{2}{2z_2+2a} = \pi\ \frac{1}{-a+\sqrt{a^2-1}+a}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Infine consideriamo

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

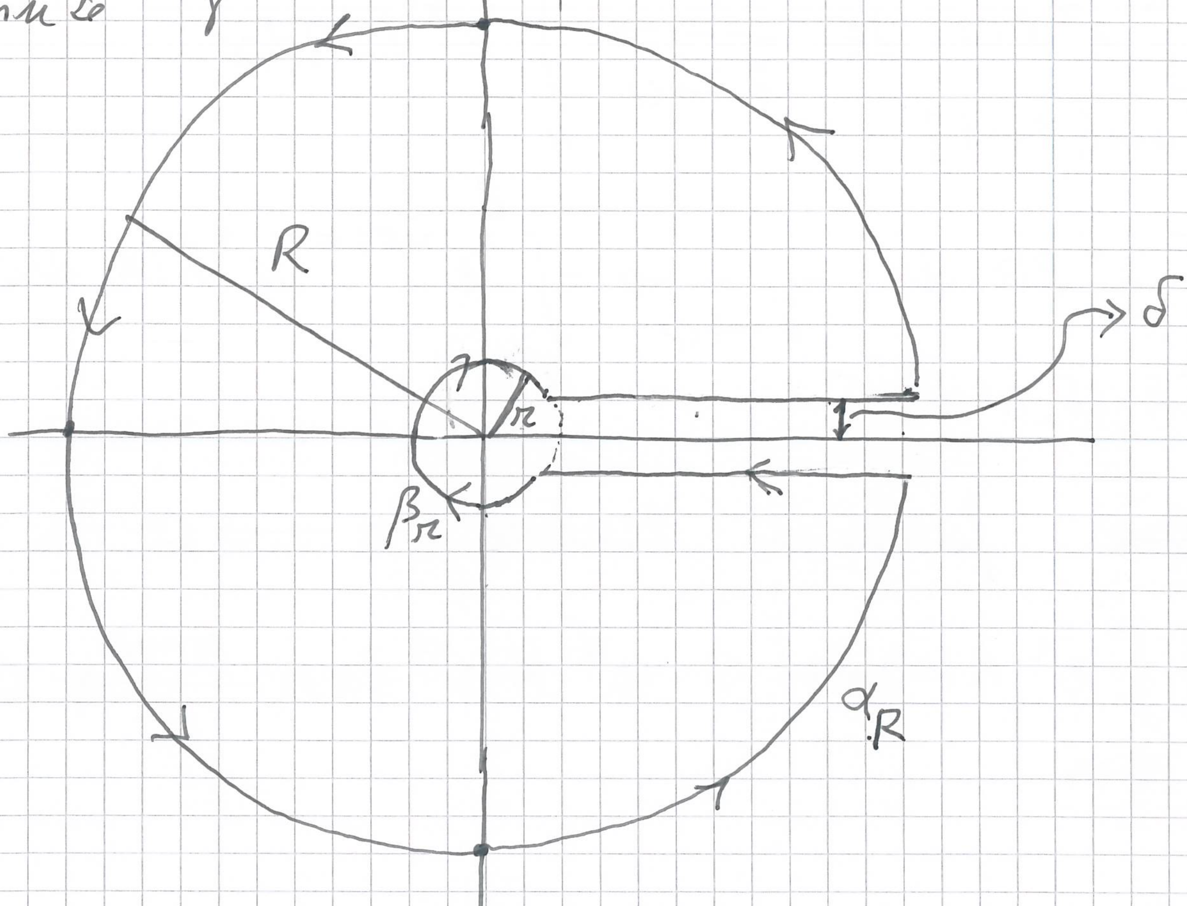
Assumiamo che $R(z)$ sia una funzione razionale, 0 al più un polo di ordine 1, R non abbia poli sul semiasse reale positivo, ed R abbia uno zero di ordine almeno 2 a ∞.

Introduciamo la funzione

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = |z|^\alpha e^{i\alpha \operatorname{Arg} z}$$

dove $\operatorname{Log} z$ è il ramo principale del logaritmo, definito su $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$

Introduciamo il seguente cammino chiuso γ



Per R grande, δ e r piccoli, abbiamo

$$\int_\gamma z^\alpha R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\zeta\neq 0\\ \text{polo}}} \operatorname{Res}(z^\alpha R(z), \zeta)$$

Ora abbiamo

$$\int_\gamma z^\alpha R(z)\,dz =$$

$$\int_{\beta_r} z^\alpha R(z)\,dz + \int_{\alpha_R} z^\alpha R(z)\,dz + \int_{[r+i\delta, R+i\delta]} z^\alpha R(z)\,dz + \int_{[R-i\delta, r-i\delta]} z^\alpha R(z)\,dz$$

Per $\delta \longrightarrow 0$

$$\int_{[r+i\delta, R+i\delta]} z^\alpha R(z)\,dz \xrightarrow[\delta\to 0]{} \int_r^R x^\alpha R(x)\,dx$$

$$\int_{[R-i\delta, r+i\delta]} z^\alpha R(z)\,dz \xrightarrow[\delta\to 0]{} -\int_r^R e^{2\pi i\alpha} x^\alpha R(x)\,dx$$

Ora facciamo tendere $r \longrightarrow 0$. Si ha

$$\left|\int_{|z|=r} z^\alpha R(z)\,dz\right| \leq r^\alpha K r^{-1} 2\pi r \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Infine, facciamo tendere $R \to +\infty$. Si ha:

$$\left| \int_{|z|=R} z^{\alpha} R(z)\, dz \right| \leq R^{\alpha} K R^{-2} 2\pi R \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

così otteniamo

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_0^{+\infty} x^{\alpha} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{\zeta \neq 0 \\ \zeta \text{ polo}}} \operatorname{Res}(z^{\alpha} R(z), \zeta)$$

$\boxed{/\!/}$