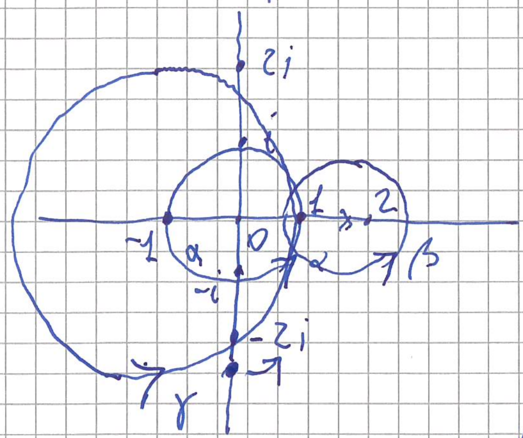
FOGLIO 6 - Svolgimento

ES. 1 $U = \mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$

$\alpha(t) = e^{it}$ $\quad \beta(t) = 5/3 + e^{it}$ $\quad \gamma(t) = -1 + 2e^{it}$ $\quad t \in [0, 1]$



$\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma$ è omologo a 0 perché

$\mathrm{Ind}_\alpha(2i) = \mathrm{Ind}_\beta(2i) = \mathrm{Ind}_\gamma(2i)$

$= \mathrm{Ind}_\alpha(-2i) = \mathrm{Ind}_\beta(-2i) = \mathrm{Ind}_\gamma(-2i)$

$= 0.$

ES. 2

α, β, γ come sopra.

$\sigma_1 := 2\alpha \qquad \sigma_2 := \beta \dot{+} \gamma$

$U = \{z \mid 1/5 < |z| < 5\}$

Se $|z| < 1/5$, $\quad \mathrm{Ind}_\alpha(z) = 1$, $\mathrm{Ind}_\beta(z) = 0$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$

quindi $\mathrm{Ind}_{\sigma_1}(z) = 2\,\mathrm{Ind}_\alpha(z) = 2$

$\mathrm{Ind}_{\sigma_2}(z) = \mathrm{Ind}_\beta(z) + \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 + 1 = 1$

σ_1 e σ_2 non sono omologhi.

ES. 3

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, semplicemente connesso (nel senso che ogni curva chiusa è contraibile). Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dimostrare che ammette una primitiva.

Dim.

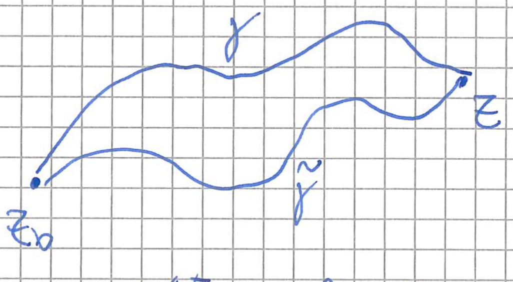
Si fissa $z_0 \in \Omega$. Poiché Ω è aperto e connesso, allora è connesso per archi.

Quindi $\forall z \in \Omega$, esiste un cammino (anche C^∞) $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ tale che

$\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$.

Definiamo
$$F(z) := \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$

dove γ è un qualunque cammino da z_0 a z.



Se $\tilde{\gamma}$ è un altro cammino da z_0 a z,

definendo
$$\sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a, b] \\ \tilde{\gamma}(\beta - (t-b)) & t \in [b, \beta - \alpha + b] \end{cases}$$

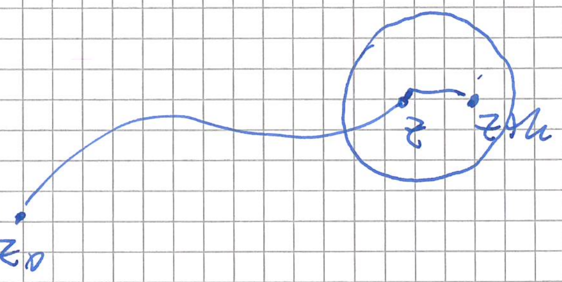
ho un cammino chiuso

quindi $\int_\sigma f(\zeta)\, d\zeta = 0$ perché σ è contraibile e quindi è omologo a 0.

e quindi $\int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} f(\zeta)\,d\zeta$

Quindi la definizione non è ambigua.

Ora abbiamo



$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,\, z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) - f(z) \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z,\, z+h]} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\,d\zeta \right| \leq \sup_{\zeta \in [z,\, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow F'(z) = f(z)$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$ $\quad f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$

f^2 ha un polo al più di ordine 4

$Res(f^2, z_0) = 2(c_{-2}\, c_1 + c_{-1}\, c_0)$

ES. 5 $\quad f \in H(\mathbb{C}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$n \in \mathbb{N}$ calcolare

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)+f(1/z)}{z^n}, 0\right) = \begin{cases} a_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \\ a_1 & \text{se } n = 0 \\ 2a_0 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

ES. 6 $\quad 5z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0$

quante soluzioni in $D(0,1)$?

pongo $\quad f(z) = 5z^3 + z^2 + 2z + 1$

$g(z) = 5z^3$

$$|f(z) - g(z)| = |z^2 + 2z + 1| \leq |z|^2 + 2|z| + 1$$

$$= 4 < 5 = |5z^3| \quad \text{se } |z| = 1.$$

$\Longrightarrow$ ci sono tre (3) soluzioni.

ES. 7 $\quad f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0.$

$g(z) = z^n \qquad$ su $|z| = R$,

$$|f(z) - g(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \leq$$

$$\leq |a_{n-1}| R^{n-1} + \dots + |a_0| < R^n = |g(z)|$$

se R grande

Per Rouché, f ha n zeri in $D(0,R)$. $\square$