SUCCESSIONI DI FUNZIONI OLOMORFE

Def.

Sia $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Si dice che $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ uniformemente sui compatti di Ω $\Longleftrightarrow$ $\forall\, K \subseteq \Omega$ compatto, $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ uniformemente su K.

Ricordiamo il

TEOREMA DI WEIERSTRASS (dim. a pag. 35)

Se $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni olomorfe in Ω e se $\exists\, f:\Omega\to\mathbb{C}$ t.c. $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ uniformemente sui compatti di Ω, allora $f\in H(\Omega)$ e $f_j' \xrightarrow{j\to\infty} f'$ uniformemente sui compatti di Ω. $\boxtimes$

Ora dimostreremo un criterio per la convergenza sui compatti di Ω.

Definizione

Sia $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ una famiglia di funzioni olomorfe in Ω. Si dice che $\mathcal{F}$ è una "famiglia normale" se e solo se ogni successione di elementi di $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti di Ω.

TEOREMA DI MONTEL

Sia $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ una famiglia di funzioni olomorfe. Si suppone che $\mathcal{F}$ sia uniformemente limitata su ogni compatto contenuto in Ω (cioè $\forall K \subseteq \Omega$ compatto $\exists M(K) > 0$ t.c. $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M(K)$).

Allora $\mathcal{F}$ è una famiglia normale.

Dimostrazione

Utilizzeremo il teorema di Ascoli-Arzelà.

Sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di compatti t.c. $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ $\forall n$, e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$.

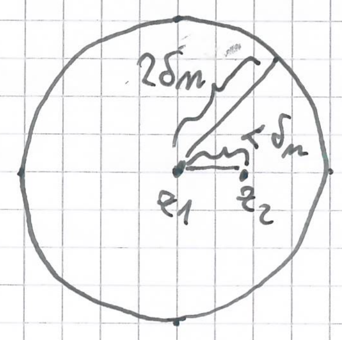
Ad esempio,

$$K_n := \mathbb{C} \setminus V_n, \quad V_n := \{|z| > n\} \cup \left(\bigcup_{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega} D(z, \tfrac{1}{n}) \right)$$

Allora $\forall n$ $\exists \delta_n$ tale che

$$D(z, 2\delta_n) \subseteq \mathring{K}_{n+1} \qquad \forall z \in K_n$$

se $z_1, z_2 \in K_n$ sono tali che $|z_1 - z_2| < \delta_n$, prendiamo il cerchio γ centrato in z_1 con raggio $2\delta_n$



Abbiamo $\forall f \in \mathcal{Y}$

$$\left.\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta \\ f(z_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2}\, d\zeta \end{aligned}\right\} \text{formule di Cauchy}$$

da cui

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z_1 - z_2) f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta$$

Poiché $|\zeta - z_1| = 2\delta_n$ e $|\zeta - z_2| > \delta_n$ per $\zeta \in \gamma^*$,

si ha

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}\, |z_1 - z_2|$$

Abbiamo quindi dimostrato che, $\forall n$, la famiglia $(f|_{K_n})_{f \in \mathcal{Y}}$ è equicontinua su K_n.

Se $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{Y}$, allora per Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione

$$f_{j_{1,1}}, \; f_{j_{1,2}}, \; \dots, \; f_{j_{1,n}}, \; \dots$$

t.c. $(f_{j_{1,k}})_k$ converge uniformemente su K_1.

Da queste estraggo una sottosuccessione
$f_{j_{2,1}}, f_{j_{2,2}}, \ldots, f_{j_{2,n}}, \ldots$
tale che $(f_{j_{2,k}})_k$ converge uniformemente su K_2. E così via.

La successione "diagonale" $(f_{j_{n,n}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente su ogni K_j. ▨

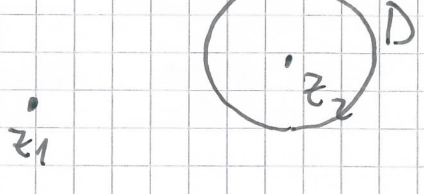
TEOREMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $H(\Omega)$. Supponiamo che f_n sia iniettiva $\forall n$, e che $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ uniformemente sui compatti di Ω. Allora f o è costante, o è iniettiva.

Dim.

Supponiamo che f non sia costante.
Siano $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, e si ponga $\alpha := f(z_1)$, $\alpha_n := f_n(z_1)$.

Sia $\bar{D}$ un disco chiuso centrato in z_2, tale che $z_1 \notin \bar{D}$ e tale che $f - \alpha$ non abbia zeri in $\partial\Omega$



Questo è possibile perché se $f-\alpha$ avesse uno zero in $\partial D(z_2, \varepsilon)$ $\forall\, \varepsilon > 0$, avrei $f(z) - \alpha = 0$ su un insieme che si accumula in $z_2 \in \Omega$, e quindi $f(z) \equiv \alpha$, il che è assurdo.

La successione $(f_n - \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f-\alpha$, uniformemente su $\bar{D}$.

Inoltre, $\forall\, n$, $f_n - \alpha_n$ non ha zeri in $\bar{D}$, perché è iniettiva e si annulla già in $z_1 \notin \bar{D}$.

Dal teorema di Rouché segue che $f-\alpha$ non ha zeri in D, e quindi in particolare $f(z_2) \neq f(z_1)$. ▨

UNA TRASFORMAZIONE "LINEARE FRATTA"

Richiamiamo il lemma di Schwartz (dimostrato a pag. 46-47).

LEMMA DI SCHWARTZ

Sia $f : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $f(0)=0$, $f(z) \in D(0,1)$ $\forall z$.
Allora $|f'(0)| \leq 1$ e $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z$.
Se in $z_0 \neq 0$ $|f(z_0)| = |z_0|$ oppure se $|f'(0)| = 1$, allora $\exists\, \vartheta \in \mathbb{R}$ t.c. $f(z) = e^{i\vartheta} z$. ▨

Nella dimostrazione del teorema della mappa di Riemann useremo il lemma di Schwartz in combinazione con la seguente famiglia di funzioni:

$\forall \alpha \in D(0,1)$, sia $\varphi_\alpha(z) := \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$

φ_α appartiene alla classe delle "funzioni lineari fratte", o "Gruppo di Möbius", su cui ora non ci soffermiamo. Raccogliamo qua alcune proprietà di φ_α.

TEOREMA

Si fissi $\alpha \in D(0,1)$. Allora φ_α è una mappa iniettiva, che manda

$\partial D(0,1)$ su $\partial D(0,1)$, $D(0,1)$ su $D(0,1)$ e α in 0. L'inversa di φ_α è $\varphi_{-\alpha}$.
Si ha $\varphi_\alpha'(0) = 1-|\alpha|^2$ $\varphi_\alpha'(\alpha) = \dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$.

Dimostrazione

φ_α è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ eccetto un polo in $1/\bar{\alpha} \notin D(0,1)$.

Si vede subito che

$$\varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(z)) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}+\alpha}{1+\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}} = \frac{z-\alpha+\alpha-|\alpha|^2 z}{1-\bar{\alpha}z+\bar{\alpha}z-|\alpha|^2} = z.$$

Segue che φ_α è iniettiva, e $\varphi_{-\alpha}$ è la sua inversa.

Se $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-\bar{\alpha}e^{it}}\right| = \frac{|e^{it}-\alpha|}{|e^{-it}-\bar{\alpha}|} = 1$$

Quindi φ_α mappa $\partial D(0,1)$ in $\partial D(0,1)$.
Analogamente, $\varphi_{-\alpha}$ mappa $\partial D(0,1)$ in $\partial D(0,1)$, cosicché $\varphi_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$.

Per il principio del massimo, si deve avere $\varphi_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$ e analogamente $\varphi_\alpha(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$, e quindi

$$\varphi_\alpha(D(0,1)) = D(0,1). \quad \boxtimes$$

TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN

Sia $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Allora Ω è olomorficamente equivalente a $D(0,1)$.

Dimostrazione

1° passo Dimostriamo che $\exists\, \psi : H(\Omega)$ iniettiva, tale che $\psi(\Omega) \subseteq D(0,1)$.

Se $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene un disco $D(w_0, \delta)$, allora

$$z \longmapsto \frac{\delta}{z-w}$$

mappa Ω in $D(0,1)$ iniettivamente.

Se $\mathbb{C} \setminus \Omega$ non contiene un disco, facciamo così. Poiché $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$, possiamo prendere $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Consideriamo la funzione $z \mapsto (z - w_0)$. Su Ω, $z - w_0$ e $1/z-w_0$ sono olomorfe. Poiché Ω è semplicemente connesso (qualunque sia la definizione scelta) $\exists\ \varphi \in H(\Omega)$ tale che $\varphi(z)^2 = z - w_0$

Tale φ è iniettiva da Ω in $\mathbb{C}$.

Infatti, se $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, allora

$$\underbrace{\varphi(z_1)^2}_{= z_1 - w_0} = \underbrace{\varphi(z_2)^2}_{z_2 - w_0} \implies z_1 = z_2 .$$

Inoltre, se $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$, allora

$$\underbrace{\varphi(z_1)^2}_{= z_1 - w_0} = \underbrace{\varphi(z_2)^2}_{= z_2 - w_0} \implies z_1 = z_2.$$

Poiché φ è aperta, $\exists\ \tilde{w}_0 \in \mathbb{C}$, $\exists\ \delta$ con $0 < \delta < |\tilde{w}_0|$ t.c.

$$\varphi(\Omega) \supseteq D(\tilde{w}_0, \delta).$$

Consideriamo il simmetrico $D(-\tilde{w}_0, \delta)$.
Asserisco che $D(-\tilde{w}_0, \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \varphi(\Omega)$.

Infatti, se $\exists\ w \in D(-\tilde{w}_0, \delta) \cap \varphi(\Omega)$, allora $\exists\ z \in \Omega$ t.c. $\varphi(z) = w \in D(-\tilde{w}_0, \delta)$

D'altra parte, poiché $D(\tilde{w}_0, \delta) \subseteq \varphi(\Omega)$, $\exists\ z'$ t.c. $\varphi(z') = -w$.

Allora $\varphi(z') = -w = \varphi(z)$

e quindi $z = z'$, e quindi

$$D(-\tilde{w}_0, \delta) \cap D(\tilde{w}_0, \delta) \neq \emptyset,$$

assurdo perché $\delta < |\tilde{w}_0|$.

Quindi Ω è olomorficamente equivalente a $\varphi(\Omega)$ e $\mathbb{C} \setminus \varphi(\Omega)$ contiene un disco.

In altre parole, non è restrittivo supporre che $\mathbb{C}\setminus\Omega$ contenga un disco. Quindi si può applicare il ragionamento di prima.

2° passo

Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} := \{ \psi : \Omega \to D(0,1) \text{ olomorfe e iniettive, } \psi(z_0) = 0 \}.$$

Osserviamo che $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Infatti per il passo 1 $\exists$ $\psi : \Omega \to D(0,1)$ olomorfa e iniettiva. Scegliendo $\alpha = \psi(z_0)$, abbiamo che $\varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$, dove φ_α è la funzione definita a pag. 116.

Dobbiamo dimostrare che $\exists$ $\psi \in \mathcal{F}$ tale che ψ sia suriettiva su $D(0,1)$.
Per fare questo, mostreremo innanzitutto che, se $\psi \in \mathcal{F}$ e $\psi(\Omega) \subsetneq D(0,1)$, allora $\exists$ $\psi_1 \in \mathcal{F}$ t.c. $|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$.
Si fa così. Se $\psi \in \mathcal{F}$, $\alpha \in D(0,1)$ e se $\alpha \notin \psi(\Omega)$, consideriamo $\varphi_\alpha \circ \psi$.
Si ha che $\varphi_\alpha \circ \psi$ è olomorfa e iniettiva, a valori in $D(0,1)$.
$\varphi_\alpha \circ \psi$ non ha zeri in Ω perché $0 = \varphi_\alpha(\alpha)$ e $\alpha \notin \psi(\Omega)$.

Allora $\exists\ g \in H(\Omega)$ tale che $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$.
g ha valori in $D(0,1)$ ed è iniettiva, perché se $g(z_1) = g(z_2)$ allora

$$\begin{aligned} g(z_1)^2 &= g(z_2)^2 \\ = \varphi_\alpha \circ \psi(z_1) &\qquad \varphi_\alpha \circ \psi(z_2) = \end{aligned} \quad \Rightarrow z_1 = z_2$$

Definiamo $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$ dove $\beta = g(z_0)$.
Allora $\psi_1 \in \mathcal{F}$, perché $\psi_1(z_0) = \varphi_\beta(\beta) = 0$
Definendo $s(w) := w^2$, $w \in \mathbb{C}$, si ha

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \underbrace{\varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}}_{=:F} \circ \psi_1 = F \circ \psi_1 .$$

Si ha

$$\psi'(z) = F'(\psi_1(z))\, \psi_1'(z)$$

e, poiché $\psi_1(z_0) = 0$, abbiamo

$$\psi'(z_0) = F'(0)\, \psi_1'(z_0) .$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} F(0) &= (\varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta})(0) = \varphi_{-\alpha}\left(\varphi_{-\beta}(0)^2\right) = \\ &= \varphi_{-\alpha}(\beta^2) = \varphi_{-\alpha}(g(z_0)^2) = \\ &= \varphi_{-\alpha}(\varphi_\alpha(\psi(z_0))) = \psi(z_0) = 0 . \end{aligned}$$

Inoltre $F : D(0,1) \to D(0,1)$, e F <u>non</u> è iniettiva.

Quindi per il lemma di Schwartz deve essere $|F'(0)| < 1$ (altrimenti F sarebbe una rotazione e quindi sarebbe iniettiva).
Da ciò segue che $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$ (si noti che $|\psi_1'(z_0)| \neq 0$ perché ψ_1 è iniettiva).

<u>3° passo</u>

Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e poniamo

$$\eta := \sup \{ |\psi'(z_0)| : \psi \in \mathcal{Y} \} > 0 .$$

Per quanto dimostrato nel 2° passo, se per qualche $h \in \mathcal{Y}$ si ha $|h'(z_0)| = \eta$, allora deve essere $h(\Omega) = D(0,1)$.
Quindi per concludere la dimostrazione bisogna trovare $h \in \mathcal{Y}$ t.c. $|h'(z_0)| = \eta$.

Poiché $|\psi(z)| < 1 \quad \forall z \in \Omega, \ \forall \psi \in \mathcal{Y}$, si ha che $\mathcal{Y}$ è una famiglia normale (per il teorema di Montel).

Sia $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{Y}$ t.c.

$$|\psi_n'(z_0)| \longrightarrow \eta \quad \text{per } n \to \infty .$$

Allora $\exists$ sottosuccessione (che chiamiamo ancora $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$) t.c. ψ_n converge uniformemente sui compatti a una funzione $h \in H(\Omega)$ (ovviamente $h(z_0)=0$).
Per il teorema di Weierstrass, $\psi_n' \to h'$ uniformemente sui compatti, e quindi
$\psi_n'(z_0) \xrightarrow{n\to\infty} h'(z_0)$ e quindi $|h'(z_0)| = \eta > 0$.

h non è costante e quindi è iniettiva (teorema dimostrato a pag. 114).

Inoltre $\psi_n(\Omega) \subseteq D(0,1) \Rightarrow h(\Omega) \subseteq \overline{D(0,1)}$, ma poiché h è aperta, deve essere $h(\Omega) \subseteq D(0,1)$.
Quindi $h \in \mathcal{Y}$, $|h'(z_0)| = \eta$ e la dimostrazione è completa. $\blacksquare$