PRINCIPIO DEL MASSIMO PER FUNZIONI ARMONICHE

(caso facile)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armonica e non costante. Allora u non ha massimo in Ω.

<u>Dim.</u>

Sia $z_0 \in \Omega$ un punto di massimo. Allora $\exists\ \rho > 0$ t.c. $u(z) \leq u(z_0)\ \forall\ z \in D(z_0, \rho)$.

$\forall\ 0 \leq r < \rho$ si ha

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt .$$

Ora $u(z_0 + re^{it}) \leq u(z_0)\ \forall\ t \in [0, 2\pi]$.

Se $u(z_0 + re^{it^*}) < u(z_0)$ per qualche t^*, allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. $u(z_0 + re^{it}) < u(z_0)$ per $t \in]t^* - \delta, t^* + \delta[$ (teor. permanenza del segno)

e quindi si ha

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt < u(z_0)$$

il che è assurdo.

Quindi deve essere $u(z_0 + re^{it}) = u(z_0)\ \forall t$.

Per l'arbitrarietà di r, si ha $u(z) = u(z_0)$ in $D(z_0, \rho)$.

②

Quindi ricapitolando se z_0 è punto di massimo, allora $u(z) \equiv u(z_0)$ in un disco $D(z_0, \rho)$.

Definiamo ora $M := u(z_0)$, $\mathcal{E} := \{ z \in \Omega \mid u(z) = M \}$.

Si ha che $\mathcal{E} \neq \emptyset$, $\mathcal{E}$ è chiuso in Ω perché è la controimmagine di $\{M\}$, e infine $\mathcal{E}$ è aperto per quanto visto sopra. Poiché Ω è connesso, allora $\mathcal{E} = \Omega$, quindi $u(z) \equiv M$ in Ω. ▨