IL PROBLEMA DI DIRICHLET

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia f una funzione definita su $\partial\Omega$.
Il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & z \in \Omega \\ u = f & z \in \partial\Omega \end{cases}$$

consiste nel trovare una funzione $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia armonica in Ω e che coincida con f su $\partial\Omega$.

Ci occuperemo del caso particolare in cui f sia continua su $\partial\Omega$ e Ω è un disco, che per semplicità assumiamo essere il disco unitario centrato in 0, cioè $D(0,1)$.

UNICITÀ

Se $\overline{\Omega}$ è limitato e f è continua su $\partial\Omega$, allora esiste al più una soluzione $u \in C(\overline{\Omega})$ del problema di Dirichlet

$$(PD) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ u = f \text{ in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dim.

Siano $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$ soluzioni di (PD).

Allora $v := u_1 - u_2$ risolve

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Poiché $\bar{\Omega}$ è limitato e v è continua, allora v ammette massimo e, per il principio del massimo, tale massimo è raggiunto sulla frontiera. Quindi $v \leq 0$ su $\bar{\Omega}$.

Analogamente, applicando il principio del max a $-v$, si ottiene $v \geq 0$ su $\bar{\Omega}$. Quindi $v \equiv 0$ in $\bar{\Omega}$. $\blacksquare$

Per dimostrare l'esistenza, bisogna introdurre il nucleo di Poisson.

NUCLEO DI POISSON

<u>Notazione</u>: se γ è una curva in $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ C^1-a tratti, e se $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, definiamo

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

<u>Definizione</u>

Si chiama nucleo di Poisson la funzione $P(z,\zeta) = \dfrac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)$

definite per $(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2$ con $z \neq \zeta$.

LEMMA 1

1) Sia $\zeta \neq 0$ fissato. Allora $P(z,\zeta)$ è una funzione armonica in $D(0,|\zeta|)$

2) Se $r>0$ e $\gamma(\vartheta) = re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, allora

$$\frac{1}{2\pi r}\int_\gamma P(z,\zeta)\,|d\zeta| = 1 \qquad \forall\ |z|<r.$$

$$\left[= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, d\vartheta \right.$$

Dim.
Il punto 1) è ovvio. Per il punto 2), si ha:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\vartheta}+z}{re^{i\vartheta}-z}\right)d\vartheta$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\vartheta}+z}{re^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{1}{\zeta}\,d\zeta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left(\frac{2}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(0)\right) = 2-1 = 1$$

$\boxtimes$

LEMMA 2

Sia $D(z_0, r)$ un disco in $\mathbb{C}$ (per semplicità assumiamo $z_0 = 0$). Sia h una funzione continua su $\partial D(0,r)$ a valori in $\mathbb{R}$. Sia

$$u(z) := \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial D} P(z, \zeta)\, h(\zeta)\, |d\zeta| \qquad z \in D(0,r)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\, h(re^{i\theta})\, d\theta$$

Allora u è armonica in $D(0,r)$.

Inoltre $\|u\|_{L^\infty(D)} \leq \|h\|_{L^\infty(\partial D)}$

Dim.

Osserviamo innanzitutto che

$$M(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

è analitica in D. Infatti

$$M(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \frac{h(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \frac{h(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \right) z^n$$

perché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$ converge uniformemente su $\partial D(0,r)$.

Ora si ha che

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, h(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\vartheta}+z}{re^{i\vartheta}-z}\, h(re^{i\vartheta})\, d\vartheta\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{h(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \left(\frac{2}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta}\right) h(\zeta)\, d\zeta\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\, 2H(z) - H(0)\,\right].$$

Quindi $u(z)$ è armonica in $D(0,r)$.

Infine, osserviamo che, $\forall\ z \in D$,

$$|u(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, h(re^{i\vartheta})\, d\vartheta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(z, re^{i\vartheta})|\, |h(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

$\boxed{P > 0}$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, \|h\|_{L^\infty(\partial D)}\, d\vartheta$$

$$= \|h\|_{L^\infty(\partial D)}$$

$\boxed{\text{poiché } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, d\vartheta = 1}$

Quindi $\|u\|_{L^\infty(D)} \leq \|h\|_{L^\infty(\partial D)}$ ▨

Ora possiamo enunciare e dimostrare il

TEOREMA DI SCHWARTZ

Sia $D(0,r) \subseteq \mathbb{C}$ un disco. Sia h continua su ∂D a valori in $\mathbb{R}$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = h & \text{in } \partial D \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, data da

$$(\bigstar) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, h(re^{i\vartheta})\, d\vartheta \qquad z \in D.$$

Dim.

L'unicità l'abbiamo già dimostrata.

Per completare la dimostrazione, bisogna mostrare che

$$u(z) := \begin{cases} h(z) & z \in \partial D(0,r) \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, h(re^{i\vartheta})\, d\vartheta & z \in D(0,r) \end{cases}$$

è continua su $\overline{D}(0,r)$. Sia $r=1$

Supponiamo che $h(e^{it}) = e^{int}$ $n\in\mathbb{N}$, $t\in[0,2\pi]$

Per $z=\rho e^{i\vartheta}$, con $\rho<1$, $0\le\vartheta<2\pi$,

si ha

$$u(\rho e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{|e^{it}-\rho e^{i\vartheta}|}e^{int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{|1-\rho e^{i(\vartheta-t)}|^2}e^{int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)\left|\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k e^{ik(\vartheta-t)}\right|^2 e^{int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k e^{ik(\vartheta-t)}\sum_{h=0}^{\infty}\rho^h e^{-ih(\vartheta-t)}e^{int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l+j=k}\rho^l\rho^j e^{il(\vartheta-t)}e^{-ij(\vartheta-t)}e^{int}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1-\rho^2)\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\sum_{l+j=k}e^{i(l-j)\vartheta}\int_0^{2\pi}e^{-i(l-j)t+int}\,dt$$

l'integrale è $\neq 0$ solo se $l-j=n$

$$\begin{cases} l+j=k \\ l-j=n \end{cases} \qquad \begin{cases} j=\dfrac{k-n}{2} \\ l=\dfrac{k+n}{2} \end{cases} \longrightarrow k\ge n$$

$=$

$$= (1-\rho^2) \sum_{k=n}^{\infty} \rho^k \sum_{\substack{l+j=k \\ l-j=n}} e^{i(l-j)\vartheta} \qquad j = \frac{k-n}{2} \quad l = \frac{k+n}{2}$$

$$= \begin{cases} (1-\rho^2) \displaystyle\sum_{\substack{k \geq n \\ k \text{ pari}}} \rho^k e^{in\vartheta} & n \text{ pari} \\ (1-\rho^2) \displaystyle\sum_{\substack{k \geq n \\ k \text{ dispari}}} \rho^k e^{in\vartheta} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$= \rho^n e^{in\vartheta}$$

In modo analogo, se $h(t) = e^{-int}$, si ottiene $u(\rho e^{i\vartheta}) = \rho^n e^{-in\vartheta}$, $n \in \mathbb{N}$.

In generale, se

$$h(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

è un polinomio trigonometrico, si ha

$$u(z) = u(\rho e^{i\vartheta}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \rho^{|n|} e^{in\vartheta}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n z^n + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} \bar{z}^n$$

che è continua su $\overline{D(0,1)}$, con

$u(z) = h(z)$ su $\overline{\partial D(0,1)}$

A questo punto, se $h \in C(\partial D)$, si approssima h con polinomi trigonometrici $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|p_n - h\|_{L^\infty(\partial D)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. (vedi appendice)

$\forall\, n$, sia $u_n(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{it})\, p_n(e^{it})\,dt$

Per il lemma 2, infine si ha

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(D)} \leq \|p_n - h\|_{L^\infty(\partial D)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

da cui segue che $\|u_n - u\|_{L^\infty(\overline{D})} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

e quindi $u \in C(\overline{D})$ e $u \equiv h$ in ∂D. $\boxtimes$