

ANALISI COMPLESSA – Esercizi – Foglio 9

Esercizio 1 Sia $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione armonica, superiormente o inferiormente limitata. Dimostrare che allora u è costante.

Esercizio 2 In ciascuno dei seguenti casi, dire se u è armonica su Ω , e (se esiste) trovare una sua armonica coniugata:

- (1) $u(z) = xy(x^2 + y^2)^{-2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- (2) $u(z) = \text{Arg}\sqrt{z}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$;
- (3) $u(z) = \text{Log}|z^2 - 1|$, $\Omega = \{\text{Im}z > 0\}$.

Esercizio 3. Risolvere il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & z \in D \\ u = h & z \in \partial D \end{cases}$$

nei seguenti casi:

- (1) $D = D(0, 1)$, $h(z) = x^2 - 2y$;
- (2) $D = D(0, 2)$, $h(z) = x^2 - 2y^2$;
- (3) $D = D(0, 1/2)$, $h(z) = 4x^2y - 8xy^2$.