# Corso di Analisi 3
# Parte II: Integrale di Riemann

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2020/2021

**Nota.** Questi appunti sono volutamente stringati, in quanto la teoria dell'integrale verrà ripresa e generalizzata nel corso di Analisi Reale del prossimo anno. Ci limiteremo all'esposizione dell'integrale secondo Riemann.

## Integrale su un rettangolo

Sia $Q$ un rettangolo di $\mathbb{R}^N$, ossia un insieme del tipo

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]\,,$$

e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*. Questo significa che esistono due costanti $c, C$ tali che

$$c \leq f(\boldsymbol{x}) \leq C\,, \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{x} \in Q\,.$$

Per semplicità, supporremo $N = 2$, ma quello che segue può essere fatto anche nel caso generale.

Sia dunque $Q = [a, b] \times [c, d]$. Consideriamo una *suddivisione* del rettangolo $Q$: si tratta di scegliere un insieme finito di punti

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}\,,$$

tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

e un insieme finito di punti

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}\,,$$

tali che

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d\,,$$

e di definire $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Restano così individuati i rettangolini

$$Q_{kh} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{h-1}, y_h]\,,$$

per la cui area useremo la notazione $|Q_{kh}| = (x_k - x_{k-1})(y_h - y_{h-1})$.

Definiamo i numeri reali

$$\ell'_{kh} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in Q_{kh}\}\,, \quad \ell''_{kh} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in Q_{kh}\}\,,$$

(si ricordi che $f$ è limitata) e le corrispondenti somme

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \ell'_{kh}|Q_{kh}|\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \ell''_{kh}|Q_{kh}|\,,$$

che chiameremo *somma inferiore* e *somma superiore*, rispettivamente.

**Lemma.** *Valgono le seguenti proprietà di monotonia:*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{D} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}} & \Rightarrow & \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}'(f,\widetilde{\mathcal{D}})\,, \\ \mathcal{D} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}} & \Rightarrow & \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \ge \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}})\,. \end{array}$$

*Inoltre, se $\mathcal{D}$ e $\widetilde{\mathcal{D}}$ sono due suddivisioni qualiasi di $Q$, allora*

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f,\widetilde{\mathcal{D}})\,.$$

Ricordando che $f$ è una funzione limitata, possiamo dare la seguente

**Definizione.** *Se il numero reale*

$$\sigma'(f) = \sup\{\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ è una suddivisione di } Q\}$$

*coincide con*

$$\sigma''(f) = \inf\{\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ è una suddivisione di } Q\}\,,$$

*tale numero reale si chiama* **integrale** *di $f$ su $Q$, e si indica con uno dei simboli*

$$\int_Q f\,, \quad \int_Q f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,, \quad \int_Q f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

*In tal caso si dice che la funzione $f$ è* **integrabile** *(secondo Riemann) su $Q$.*

Quindi, l'integrale di $f$ su $Q$, se esiste, è quel $\sigma \in \mathbb{R}$ con questa proprietà:

*per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}''$ di $Q$ per cui*

$$\sigma - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}') \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}'') \le \sigma + \varepsilon\,.$$

Equivalentemente, tenendo conto delle proprietà di monotonia viste sopra,

*per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $Q$ per cui*

$$\sigma - \varepsilon \le \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) \le \sigma + \varepsilon\,.$$

**Esempio 1.** Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ la funzione costante di valore $\alpha \in \mathbb{R}$. Si verifica rapidamente che, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di $Q$, si ha $\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = \alpha|Q|$. Ne segue quindi che $\int_Q f = \alpha|Q|$, ossia che

$$\int_Q \alpha\,dx\,dy = \alpha|Q|\,.$$

**Esempio 2.** Una funzione non integrabile è $f : Q \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Si vede infatti che, qualsiasi sia la suddivisione $\mathcal{D}$ di $Q$, si ha $\ell'_k = 0$ e $\ell''_k = 1$, per ogni $k$, per cui

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) = 0\,, \quad \mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) = |Q|\,.$$

Allora anche

$$\sigma'(f) = 0\,, \quad \sigma''(f) = |Q|\,,$$

per cui $f$ non è integrabile.

## Proprietà delle funzioni integrabili su rettangoli

Continuiamo a indicare con $Q$ un rettangolo di $\mathbb{R}^N$. Risulta utile il seguente

**Criterio di integrabilità.** *La funzione $f$ è integrabile su $Q$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{D}$ di $Q$ per cui*

$$\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \le \varepsilon\,.$$

Per quanto riguarda l'integrabilità delle funzioni continue, abbiamo il seguente

**Teorema.** *Se $f : Q \to \mathbb{R}$ è continua, allora essa è integrabile.*

Enunciamo alcune proprietà elementari dell'integrale.

**Teorema.** *Se $f, g$ sono funzioni integrabili su $Q$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, anche $f \pm g$ e $\lambda f$ lo sono, e in tal caso*

$$\int_Q (f \pm g) = \int_Q f \pm \int_Q g\,, \qquad \int_Q \lambda f = \lambda \int_Q f\,.$$

**Teorema.** *Se $f, g$ sono funzioni integrabili su $Q$, anche $fg$ e $|f|$ lo sono.*

Vediamo ora una stima sulla "media integrale".

**Teorema.** *Se $f$ è una funzione integrabile su $Q$, allora*

$$\inf f(Q) \le \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\,dx \le \sup f(Q)\,.$$

**Corollario.** *Se $f$ è una funzione integrabile su $Q$ e $f \ge 0$, allora*

$$\int_Q f \ge 0\,.$$

Come conseguenza, se $f, g$ sono funzioni integrabili su $Q$ e $f \le g$, allora

$$\int_Q f \le \int_Q g\,.$$

Inoltre, se $f$ è integrabile su $Q$, allora

$$\left|\int_Q f\right| \le \int_Q |f|\,.$$

Enunciamo un teorema di "passaggio al limite sotto segno di integrale".

**Teorema.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue $f_n : Q \to \mathbb{R}$ che converge uniformemente a $f$. Allora*

$$\int_Q f = \lim_n \left(\int_Q f_n\right).$$

Concludiamo questa sezione con la **proprietà di additività dell'integrale**.

**Teorema.** *Sia $Q = Q_1 \cup Q_2$, con $Q_1$ e $Q_2$ due rettangoli non sovrapposti. Allora una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ è integrabile su $Q$ se e solo se lo è su $Q_1$ e su $Q_2$. In tal caso,*

$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f\,.$$

## Il teorema di riduzione su un rettangolo

Sia $Q = Q_1 \times Q_2$, con $Q_1$ e $Q_2$ due rettangoli in $\mathbb{R}^{N_1}$ e $\mathbb{R}^{N_2}$, rispettivamente. Scriveremo gli elementi di $Q$ come coppia $(x, y)$, con $x \in Q_1$ e $y \in Q_2$.

**Teorema.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ integrabile su $Q$, e supponiamo che per ogni $y \in Q_2$, la funzione[1] $f(\cdot, y)$ sia integrabile su $Q_1$. Allora la funzione $G : Q_2 \to \mathbb{R}$ definita da $G(y) = \int_{Q_1} f(x, y)\,dx$ è integrabile, e vale la foirmula*

$$\int_Q f = \int_{Q_2} G\,.$$

Si ha quindi

$$\int_Q f = \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(x, y)\,dx\right) dy\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Supporremo per semplicità $N = 2$ e $Q_1 = [a, b]$, $Q_2 = [c, d]$. Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ una qualsiasi suddivisione di $Q$, con le notazioni introdotte in precedenza. Essendo $f$ limitata, anche $G$ lo è. Poniamo, per ogni $y \in [c, d]$,

$$m_k(y) = \inf\{f(x, y) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,, \quad M_k(y) = \sup\{f(x, y) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,.$$

Allora, per ogni $y \in [c, d]$,

$$\sum_{k=1}^n m_k(y)(x_k - x_{k-1}) \le G(y) \le \sum_{k=1}^n M_k(y)(x_k - x_{k-1})\,.$$

[1]La funzione $g = f(\cdot, y) : Q_1 \to \mathbb{R}$ è definita da $g(x) = f(x, y)$.

Notiamo inoltre che

$$\ell'_{kh} \leq m_k(y) \leq M_k(y) \leq \ell''_{kh}\,, \qquad \text{per ogni } y \in [y_{h-1}, y_h]\,.$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}''(G,\mathcal{D}_2) &= \sum_{h=1}^{m} \sup\Big\{G(y) : y \in [y_{h-1},y_h]\Big\}(y_h - y_{h-1}) \\
&\leq \sum_{h=1}^{m} \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} M_k(y)(x_k - x_{k-1}) : y \in [y_{h-1},y_h]\Big\}(y_h - y_{h-1}) \\
&\leq \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \sup\Big\{M_k(y) : y \in [y_{h-1},y_h]\Big\}(x_k - x_{k-1})(y_h - y_{h-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \ell''_{kh}|Q_{kh}| = \mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'(G,\mathcal{D}_2) &= \sum_{h=1}^{m} \inf\Big\{G(y) : y \in [y_{h-1},y_h]\Big\}(y_h - y_{h-1}) \\
&\geq \sum_{h=1}^{m} \inf\Big\{\sum_{k=1}^{n} m_k(y)(x_k - x_{k-1}) : y \in [y_{h-1},y_h]\Big\}(y_h - y_{h-1}) \\
&\geq \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \inf\Big\{m_k(y) : y \in [y_{h-1},y_h]\Big\}(x_k - x_{k-1})(y_h - y_{h-1}) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} \ell'_{kh}|Q_{kh}| = \mathcal{S}'(f,\mathcal{D})\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, per ogni suddivisione $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, si ha che

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \mathcal{S}'(G,\mathcal{D}_2) \leq \mathcal{S}''(G,\mathcal{D}_2) \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $f$ è integrabile su $Q$, esiste $\mathcal{D}$ tale che $\mathcal{S}''(f,\mathcal{D}) - \mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \varepsilon$. Ma allora $\mathcal{S}''(G,\mathcal{D}_2) - \mathcal{S}'(G,\mathcal{D}_2) \leq \varepsilon$, per cui anche $G$ è integrabile su $[c,d]$. D'altra parte, essendo

$$\mathcal{S}'(f,\mathcal{D}) \leq \int_Q f \leq \mathcal{S}''(f,\mathcal{D})\,, \qquad \mathcal{S}'(G,\mathcal{D}_2) \leq \int_c^d G \leq \mathcal{S}''(G,\mathcal{D}_2)\,,$$

si ha che

$$\Big|\int_c^d G - \int_Q f\Big| \leq \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, ne segue che $\int_c^d G = \int_Q f$. ∎

Naturalmente, vale anche un enunciato simmetrico.

**Teorema.** *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ integrabile su $Q$, e supponiamo che per ogni $x \in Q_1$, la funzione $f(x, \cdot)$ sia integrabile su $Q_2$. Allora la funzione $G : Q_1 \to \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \int_{Q_2} f(x, y)\, dy$ è integrabile, e vale la formula*

$$\int_Q f = \int_{Q_1} G\,.$$

Si ha quindi

$$\int_Q f = \int_{Q_1} \left( \int_{Q_2} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

**Esempio.** Sia $Q = [1, 2] \times [0, 1]$ e sia $f : Q \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^{-3} \exp(x^{-1} y)\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_Q f &= \int_1^2 \left( \int_0^1 x^{-3} \exp(x^{-1} y)\, dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left[ x^{-2} \exp(x^{-1} y) \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_1^2 x^{-2} \Big( \exp(x^{-1}) - 1 \Big)\, dx \\
&= \left[ -\exp(x^{-1}) + x^{-1} \right]_1^2 = e - \sqrt{e} - \tfrac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

## Integrale su un insieme limitato

Sia $\Omega$ un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$. Vogliamo definire l'integrale di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Prendiamo un rettangolo $Q$ contenente $\Omega$ e definiamo la funzione $f_\Omega : Q \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Diremo che $f$ è integrabile su $\Omega$ se $f_\Omega$ è integrabile su $Q$, e in tal caso porremo $\int_\Omega f = \int_Q f_\Omega$. Si può verificare che questa è una buona definizione, ossia che non dipende dalla scelta del rettangolo $Q$ contenente $\Omega$.

Nel caso particolare di una funzione costante di valore 1, abbiamo la seguente

**Definizione.** *Diremo che l'insieme limitato $\Omega$ è misurabile (secondo Peano-Jordan) se la costante $1$ è integrabile su $\Omega$, e in tal caso la misura di $\Omega$ è definita da*

$$|\Omega| = \int_\Omega 1\,.$$

Si può verificare che, se $Q$ è il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_N, b_N]$, allora

$$|Q| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N)\,.$$

Risultano particolarmente importanti gli insiemi di misura nulla.

**Proposizione.** *Un insieme $\Omega$ ha misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero finito di rettangoli $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tali che*

$$\Omega \subseteq Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n \quad \text{e} \quad |Q_1| + |Q_2| + \ldots + |Q_n| \leq \varepsilon\,.$$

Esempi di insiemi di misura nulla sono quelli costituiti da un numero finito di punti, o da un segmento in $\mathbb{R}^2$, o una porzione di piano in $\mathbb{R}^3$. Se $g : Q \to \mathbb{R}$ è una funione continua, allora il suo grafico ha misura nulla. L'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

È interessante la seguente caratterizzazione della misurabilità secondo Riemann.

**Teorema.** *Un insieme limitato $\Omega$ è misurabile se e solo se $\partial\Omega$ ha misura nulla.*

Vediamo ora una caratterizzazione dell'integrabilità. Si dice che un insieme $\Omega$ è "trascurabile secondo Lebesgue" se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero finito o numerabile di rettangoli $(Q_n)_{n\geq 1}$ tali che

$$\Omega \subseteq \bigcup_{n\geq 1} Q_n \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} |Q_n| \leq \varepsilon\,.$$

**Teorema.** *Una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile secondo Lebesgue.*

Le proprietà elementari dell'integrale si estendono anche al caso di funzioni integrabili su un insieme $\Omega$. Enunciamo in particolare la proprietà di additività.

**Teorema.** *Sia $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, con $\Omega_1$ e $\Omega_2$ due insiemi disgiunti. Allora una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è integrabile su $\Omega$ se e solo se lo è su $\Omega_1$ e su $\Omega_2$. In tal caso,*

$$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f\,.$$

## Il teorema di riduzione su un insieme limitato

Si tratta di tradurre la formula del teorema di riduzione su un rettangolo al caso di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega$ limitato contenuto in un rettangolo $Q$. Come sopra, scriviamo $Q = Q_1 \times Q_2$, con $Q_1$ e $Q_2$ due rettangoli in $\mathbb{R}^{N_1}$ e $\mathbb{R}^{N_2}$, rispettivamente. Scriveremo gli elementi di $Q$ come coppia $(x, y)$, con $x \in Q_1$ e $y \in Q_2$. Definiamo, per ogni $x \in Q_1$, le sezioni

$$\Omega_x = \{y \in Q_2 : (x, y) \in \Omega\}\,.$$

Definiamo inoltre la proiezione

$$P_1\Omega = \{x \in Q_1 : \Omega_x \neq \emptyset\}\,.$$

Allora la formula si può scrivere in questo modo:

$$\int_\Omega f = \int_{P_1\Omega} \left( \int_{\Omega_x} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

Analogamente, definendo per ogni $y \in Q_2$ le sezioni

$$\Omega_y = \{x \in Q_1 : (x, y) \in \Omega\}$$

e la proiezione

$$P_2\Omega = \{y \in Q_2 : \Omega_y \neq \emptyset\} ,$$

si ha

$$\int_\Omega f = \int_{P_2\Omega} \left( \int_{\Omega_y} f(x, y)\, dx \right) dy .$$

Come casi particolari, prendendo $f$ costante uguale a 1, abbiamo le formule per la misura

$$|\Omega| = \int_{P_1\Omega} |\Omega_x|\, dx = \int_{P_2\Omega} |\Omega_y|\, dy .$$

**Esempi.** 1) Calcoliamo l'area di un cerchio centrato nell'origine di raggio $r > 0$,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\} .$$

Abbiamo che $P_1 = [-r, r]$ e $\Omega_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Quindi,

$$|\Omega| = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2.$$

2) Calcoliamo il volume di una palla tridimensionale centrata nell'origine di raggio $r > 0$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\} .$$

Possiamo procedere in due modi, a seconda di come raccogliamo le variabili.

<u>Primo modo</u>. Scriviamo $(x, y, z) = (x, (y, z))$. Abbiamo che $P_1 = [-r, r]$ e

$$\Omega_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\} , \qquad \text{per ogni } x \in [-r, r] .$$

Quindi, $\Omega_x$ è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$, la cui area è $|\Omega_x| = \pi(r^2 - x^2)$, e possiamo calcolare

$$|\Omega| = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Secondo modo</u>. Scriviamo $(x, y, z) = ((x, y), z)$. Allora

$$P_1\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\} ,$$

mentre

$$\Omega_{(x,y)} = \left[ -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right] , \text{ per ogni } (x, y) \in P_1(\Omega) .$$

Quindi,

$$|\Omega| = \int_{P_1\Omega} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy .$$

Usiamo di nuovo la formula di riduzione sull'insieme $D = P_1\Omega$. Abbiamo che $P_1 D = [-r, r]$ e $D_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\,]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Pertanto,

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= \int_D 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_{-r}^{r} \left( \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx \\
&= \int_{-r}^{r} 2(r^2 - x^2)\frac{\pi}{2}\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}
$$

Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(y/\sqrt{r^2 - u^2})$ e calcolato

$$
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}\,.
$$

3) Vogliamo calcolare il volume del tetraedro regolare di lato $\ell$. Lo supporremo appoggiato al piano $xy$, per cui la sua "base" è un triangolo equilatero di lato $\ell$, altezza $h = \frac{1}{2}\ell\sqrt{3}$ e area $A = \frac{1}{4}\ell^2\sqrt{3}$. L'altezza det tetraedro $\Omega$ è pertanto

$$
H = \sqrt{\ell^2 - (\tfrac{2}{3}h)^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\ell\,.
$$

Raggruppiamo le variabili come $((x, y), z)$ e proiettiamo sull'asse $z$, ottenendo $P_2\Omega = \left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell\right]$. Per ogni $z \in P_2\Omega$, la sezione $\Omega_z$ è un triangolo equilatero di lato $\ell_z = \ell - \sqrt{\frac{3}{2}}\,z$ e area

$$
|\Omega_z| = \frac{1}{4}\ell_z^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\ell - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,z\Big)^2.
$$

Pertanto,

$$
|\Omega| = \int_0^H |\Omega_z|\, dz = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell} \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\ell - \sqrt{\frac{3}{2}}\,z\Big)^2 dz = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\ell^3.
$$

**Nota.** Dehn ha dimostrato nel 1902, in risposta al Terzo Problema di Hilbert, che non è possibile tagliare il tetraedro in poliedri più piccoli che, ricombinati assieme, formino un parallelepipedo.

Più in generale, consideriamo ora un "cono" tridimensionale $\Omega$. Esso è ottenuto prendendo un insieme $S$, che supponiamo contenuto in $\{(x, y, z) : z = 0\}$ (la "base" di $\Omega$) e un punto $\boldsymbol{v} = (0, 0, h)$, con $h > 0$ (il "vertice" di $\Omega$). L'insieme $\Omega$ è così definito:

$$
\Omega = \{(1 - \lambda)\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \in [0, 1],\ \boldsymbol{x} \in S\}\,.
$$

La sua proiezione sull'asse $z$ ci dà il segmento $P\Omega = [0, h]$, e per ogni $z \in P\Omega$ la sezione $\Omega_z$ ha un'area

$$
|\Omega_z| = \Big(\frac{h - z}{h}\Big)^2 |\Omega_0| = \Big(\frac{h - z}{h}\Big)^2 |S|\,.
$$

Quindi il volume del cono $\Omega$ è

$$|\Omega| = \int_{P\Omega} |\Omega_z| \, dz = \int_0^h \left( \frac{h-z}{h} \right)^2 |S| \, dz = \frac{1}{3} \, |S| h \,,$$

ossia "area della base volte altezza diviso tre".

## Cambiamento di variabili

Siano $\varphi$ un diffeomorfismo tra due aperti $A$ e $B = \varphi(A)$ di $\mathbb{R}^N$, $D$ un sottoinsieme chiuso e limitato di $A$ e $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sotto le opportune ipotesi di integrabilità, si può dimostrare che vale la formula

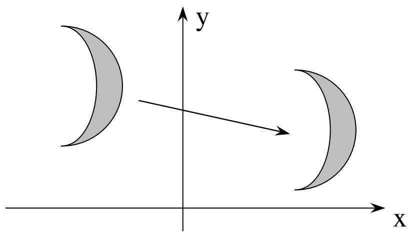
$$\int_{\varphi(D)} f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_D f(\varphi(\boldsymbol{u})) |\det \varphi'(\boldsymbol{u})| \, d\boldsymbol{u} \,.$$

Ponendo $\varphi(D) = E$, possiamo anche scrivere la formula equivalente

$$\int_E f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(\boldsymbol{u})) |\det \varphi'(\boldsymbol{u})| \, d\boldsymbol{u} \,.$$

Ci sono alcune trasformazioni che lasciano invariata la misura di ogni insieme misurabile. Ne consideriamo qui alcune delle più usate nella pratica.

**Le traslazioni.**



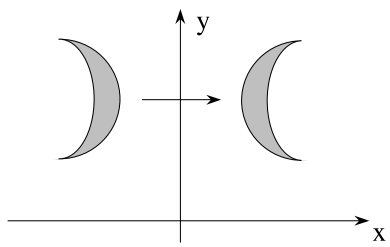

Si dice traslazione, per mezzo di un vettore fissato $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, la trasformazione definita da

$$\varphi(u, v) = (u + a_1, v + a_2) \,.$$

Si vede immediatamente che $\varphi$ è un diffeomorfismo con $\det \varphi' = 1$, per cui vale la formula

$$\int_{\varphi(D)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_D f(u + a_1, v + a_2) \, du \, dv \,.$$

**Le riflessioni.**



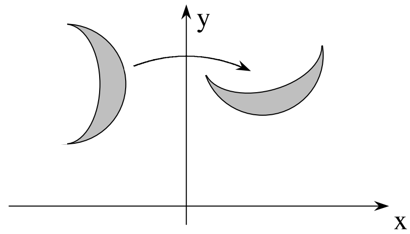

Una riflessione rispetto a un asse è definita da:

$$\varphi(u, v) = (-u, v) \,, \qquad \text{oppure} \qquad \varphi(u, v) = (u, -v) \,.$$

Qui $\det \varphi' = -1$, per cui, ad esempio nel primo caso, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(-u,v)\,du\,dv\,.$$

**Le rotazioni.**




Una rotazione attorno all'origine di un angolo fissato $\alpha$ è definita da:

$$\varphi(u,v) = (u\cos\alpha - v\sin\alpha\,,\; u\sin\alpha + v\cos\alpha)\,.$$

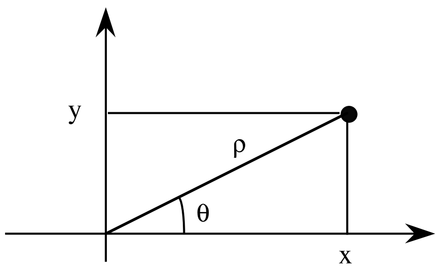
Si tratta di un diffeomorfismo, con

$$\det \varphi'(u,v) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1\,.$$

Quindi, si ha

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(u\cos\alpha - v\sin\alpha\,,\; u\sin\alpha + v\cos\alpha)\,du\,dv\,.$$

**Coordinale polari.**




Un altro tipo di trasformazione utile è la funzione $\psi : [0,+\infty[\, \times\, [0,2\pi[ \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\psi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,,$$

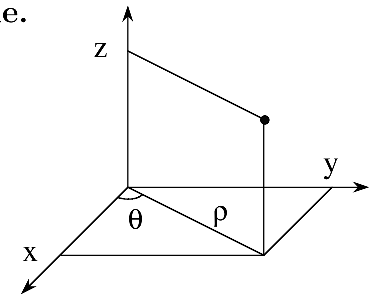
che definisce le note coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Qui bisogna fare attenzione, perché non si tratta di un diffeomorfismo. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A = ]0,+\infty[\, \times\, ]0,2\pi[\,, \qquad B = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty[\, \times \{0\})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho,\theta) = \psi(\rho,\theta)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det\varphi'(\rho,\theta) = \rho$. Preso un sottoinsieme chiuso e limitato $E$ di $\mathbb{R}^2$, fissato un $\varepsilon > 0$ possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili all'insieme

$$E_\varepsilon = E \setminus \Big( \{(x,y) : x^2 + y^2 < \varepsilon^2\} \cup \{(x,y) : x > 0, y \in ]0,\varepsilon[\,\}\Big).$$

Siccome
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} |E \setminus E_\varepsilon| = 0\,, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} |\psi^{-1}(E) \setminus \psi^{-1}(E_\varepsilon)| = 0\,,$$
otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate polari**:
$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\psi^{-1}(E)} f(\psi(\rho,\theta))\rho\,d\rho\,d\theta\,.$$
**Esempio.** Sia $f(x,y) = xy$ definita su
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 < 9\}\,.$$
Facendo il cambiamento di variabili in coordinate polari, si ha che $\psi^{-1}(E) = [0,3[\times[0,\frac{\pi}{2}]$; per il teorema di riduzione, possiamo quindi scrivere
$$\int_E f = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 \rho^3 \cos\theta \sin\theta\,d\rho\right) d\theta = \frac{81}{4}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{81}{8}\,.$$
**Coordinate cilindriche.**




Consideriamo la funzione $\xi : [0,+\infty[\,\times[0,2\pi[\,\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$\xi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,,$$
che definisce le coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$. Anche qui dobbiamo trattare una funzione che non è un diffeomorfismo. Considerando gli insiemi aperti
$$A = ]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\mathbb{R}\,, \qquad B = (\mathbb{R}^3 \setminus ([0,+\infty[\,\times\{0\}) \times \mathbb{R}\,,$$
la funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho,\theta,z) = \xi(\rho,\theta,z)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det\varphi'(\rho,\theta,z) = \rho$. Preso un sottoinsieme limitato $E$ di $\mathbb{R}^3$, procedendo in modo simile al caso delle coordinate polari, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate cilindriche**:
$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\xi^{-1}(E)} f(\xi(\rho,\theta,z))\rho\,d\rho\,d\theta\,dz\,.$$
**Esempio.** Calcoliamo l'integrale $\int_E f$, dove $f(x,y,z) = x^2+y^2$ e
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x+y+\sqrt{2}\}\,.$$

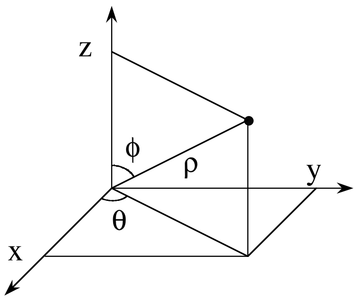
Passando a coordinate cilindriche, notiamo che

$$\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \sqrt{2} \geq 0\,,$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$ e ogni $\rho \in [0, 1]$. Facendo il cambio di variabili e usando il teorema di riduzione, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_{\xi^{-1}(E)} \rho^3\,dz\,d\theta\,d\rho \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\sqrt{2}} \rho^3\,dz \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \rho^3(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \sqrt{2})\,d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3\sqrt{2}\,d\rho \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

**Coordinate sferiche.**




Consideriamo $\sigma : [0, +\infty[\, \times [0, 2\pi[\, \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \theta, \phi) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,,$$

che definisce le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Anche qui non abbiamo un diffeomorfismo. Considerando gli insiemi aperti

$$A = ]0, +\infty[\, \times\, ]0, 2\pi[\, \times\, ]0, \pi[\,, \qquad B = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[\, \times \{0\} \times \mathbb{R})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho, \theta, \phi) = \sigma(\rho, \theta, \phi)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det \varphi'(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin\phi$. Preso un sottoinsieme limitato $E$ di $\mathbb{R}^3$, possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili a $\tilde{E} = E \cap B$. Siccome $\tilde{E}$ e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da $E$ e $\sigma^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme di misura nulla, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate sferiche**:

$$\int_E f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\sigma^{-1}(E)} f(\sigma(\rho, \theta, \phi))\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi\,.$$

**Esempio.** Calcoliamo il volume dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \int_E 1\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{\sigma^{-1}(E)} \rho \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi\,d\theta \right) d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin\phi\,d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^1 \rho\,d\rho \\
&= \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

## Integrale su sottoinsiemi non limitati

Useremo la notazione

$$B[0,r] = [-r,r] \times [-r,r] \times \ldots \times [-r,r] \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Sia $\Omega$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, non necessariamente limitato, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata tale che

$$f(\boldsymbol{x}) \geq 0\,, \text{ per ogni } \boldsymbol{x} \in \Omega\,.$$

Se $f$ è integrabile su ciascun insieme limitato $\Omega \cap B[0,r]$, con $r > 0$, si definisce

$$\int_\Omega f = \lim_{r\to+\infty} \int_{\Omega\cap B[0,r]} f\,.$$

In questo caso, il risultato non cambia se al posto di $B[0,r]$ si considera la palla euclidea $B(0,r)$, o una qualsiasi famiglia crescente di insiemi che invadono $\mathbb{R}^2$.

Nel caso in cui la funzione assuma anche valori negativi, procediamo in questo modo. Definiamo le funzioni $f^\pm : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f^+(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}), 0\}\,, \qquad f^-(\boldsymbol{x}) = \max\{-f(\boldsymbol{x}), 0\}\,,$$

per cui $f(\boldsymbol{x}) = f^+(\boldsymbol{x}) - f^-(\boldsymbol{x})$. Se ben definito, si pone quindi

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-.$$

Come caso particolare, abbiamo la misura di un insieme non necessariamente limitato

$$|\Omega| = \lim_{r\to+\infty} |\Omega \cap B[0,r]|\,.$$

Si noti che il valore $|\Omega|$ può essere in alcuni casi $+\infty$. Le proprietà dell'integrale e della misura si estendono facilmente agli insiemi illimitati.

**Esempio.** Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega f &= \lim_{r\to+\infty} \int_{\Omega\cap B(0,r)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_0^{2\pi} \int_1^r \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\pi \lim_{r\to+\infty} \int_1^r \rho^{1-2\alpha}\,d\rho\,.\end{aligned}$$

Si vede quindi che $f$ è integrabile su $\Omega$ se e solo se $\alpha > 1$, nel qual caso l'integrale vale $\frac{\pi}{\alpha-1}$.

**Esempio.** Consideriamo la funzione $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e facciamo un cambiamento di variabili in coordinate polari:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \lim_{r\to+\infty} \int_{B(0,r)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r e^{-\rho^2} \rho\,d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \lim_{r\to+\infty} \left[ -\tfrac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^r \\ &= \pi \lim_{r\to+\infty} \left( 1 - e^{-r^2} \right) = \pi\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, usando il teorema di riduzione, si ha:

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{r\to+\infty} \int_{B[0,r]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\ &= \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^r \left( \int_{-r}^r e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx \right) dy \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left( \int_{-r}^r e^{-x^2}\,dx \right) \left( \int_{-r}^r e^{-y^2}\,dy \right) \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left( \int_{-r}^r e^{-x^2}\,dx \right)^2 = \left( \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2}\,dx \right)^2 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2,\end{aligned}$$

per cui troviamo il risultato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

## Integrale di funzioni non limitate

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ non necessariamente limitata. Supponiamo dapprima

$$f(\boldsymbol{x}) \geq 0\,, \text{ per ogni } \boldsymbol{x} \in \Omega\,,$$

e consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Se queste funzioni sono integrabili su $\Omega$, si pone

$$\int_\Omega f = \lim_n \int_\Omega f_n\,.$$

Nel caso in cui la funzione assuma anche valori negativi, si pone

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-.$$

**Esempio.** Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. Abbiamo

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } x^2+y^2 \geq n^{-1/\alpha}, \\ n & \text{se } x^2+y^2 \leq n^{-1/\alpha}. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n &= \int_{B\left(0,n^{-\frac{1}{2\alpha}}\right)} f_n + \int_{B(0,1)\setminus B\left(0,n^{-\frac{1}{2\alpha}}\right)} f_n \\ &= n\left|B\left(0,n^{-\frac{1}{2\alpha}}\right)\right| + \int_0^{2\pi}\left(\int_{n^{-\frac{1}{2\alpha}}}^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\rho\,d\rho\right)d\theta \\ &= \pi n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + 2\pi\int_{n^{-\frac{1}{2\alpha}}}^1 \rho^{1-2\alpha}\,d\rho\,.\end{aligned}$$

Si vede quindi che $f$ è integrabile su $\Omega$ se e solo se $\alpha < 1$, nel qual caso l'integrale vale

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\pi n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + 2\pi\left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_{n^{-\frac{1}{2\alpha}}}^1\right) = \frac{\pi}{1-\alpha}\,.$$

## Appendice. Alcune applicazioni nella Fisica

Dato un corpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, è possibile definire una "densità di massa" $\mu : \Omega \to [0, +\infty[$. La massa totale del corpo è pertanto

$$M = \int_\Omega \mu(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Risulta molto utile considerare il "baricentro" di $\Omega$: si tratta del punto

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{M} \int_\Omega \mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Nel caso in cui la densità di massa sia costante, si tratta di un "corpo omogeneo". In questo caso, si ha $M = \mu|\Omega|$ e il suo baricentro di chiama anche "centroide"; lo denoteremo con

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

**Esempio.** Troviamo il centroide di

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}\,.$$

Trattandosi di un quarto di ellisse di semiassi $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, sappiamo già che $|\Omega| = \frac{1}{4}\pi ab = \frac{1}{8}\pi$. Pertanto,

$$\boldsymbol{c} = \frac{\pi}{8} \left( \int_\Omega x\, dx\, dy\,,\ \int_\Omega y\, dx\, dy \right).$$

Utilizzando la trasformazione in coordinate polari modificate $\varphi(\rho) = (\rho\cos\theta, \frac{1}{2}\rho\sin\theta)$ otteniamo

$$\boldsymbol{c} = \frac{\pi}{8} \left( \int_0^1 \Big( \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\rho^2 \cos\theta\, d\theta \Big) d\rho\,,\ \int_0^1 \Big( \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}\rho^2 \sin\theta\, d\theta \Big) d\rho \right) = \left( \frac{4}{3\pi}\,, \frac{2}{3\pi} \right).$$

Risulta interessante la seguente considerazione di Pappo di Alessandria (circa 300 d.C.). Sia $\Omega$ un corpo tridimensionale ottenuto ruotando attorno all'asse $z$ un'insieme $S$, che supponiamo essere contenuto in $\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Pertanto,

$$\Omega = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2}\,, z) \in S \Big\}.$$

Utilizzando le coordinate cilindriche abbiamo che

$$|\Omega| = \int_0^{2\pi} \Big( \int_S \rho\, d\rho\, dz \Big)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Big( \int_S y\, dy\, dz \Big)\, d\theta = |S| \left( 2\pi \frac{1}{|S|} \int_S y\, dy\, dz \right).$$

Il Teorema di Pappo afferma dunque che il volume del solido di rotazione $\Omega$ è uguale all'area dell'insieme $S$ moltiplicata per la lunghezza del percorso circolare compiuto dal suo baricentro attorno all'asse $z$.

Concludiamo questa parte introducendo il potenziale gravitazionale di un corpo tridimensionale $\Omega$ con densità di massa $\mu : \Omega \to [0, +\infty[$. Secondo la legge di Newton, esso è la funzione $U : \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$U(\xi) = -\int_\Omega \frac{G\mu(\boldsymbol{x})}{\|\xi - \boldsymbol{x}\|}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Se il corpo $\Omega$ è omogeneo, ossia se $\mu$ è costante, si ha che

$$U(\xi) = -GM\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{1}{\|\xi - \boldsymbol{x}\|}\, d\boldsymbol{x}\,,$$

e se tutta la sua massa $M$ è concentrata in un punto $\boldsymbol{c}$, si pone

$$U(\xi) = -\frac{GM}{\|\xi - \boldsymbol{c}\|}\,.$$

Ora vogliamo trovare il potenziale gravitazionale di una palla omogenea centrata nell'origine, di raggio $r > 0$. Sarà sufficiente calcolare $U(\xi)$ con $\xi = (0, 0, h)$, per un certo $h > r$, in quanto il problema presenta una simmetria sferica e questo permette di trovare $U(\xi)$ per ogni $\xi$ con $\|\xi\| > r$. Abbiamo quindi, passando a coordinate sferiche,

$$\begin{aligned}
U(0,0,h) &= -\int_\Omega \frac{G\mu}{\sqrt{x^2+y^2+(h-z)^2}}\, dx\, dy\, dz \\
&= -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r\left(\int_0^\pi \frac{G\mu\rho^2\sin\phi}{\sqrt{\rho^2-2h\rho\cos\phi+h^2}} d\phi\right) d\rho\right) d\theta \\
&= -2\pi G\mu \int_0^r \left[\frac{\rho}{h}\sqrt{\rho^2-2h\rho\cos\phi+h^2}\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\rho \\
&= -2\pi\frac{G}{h}\mu\int_0^r \rho(|\rho+h|-|\rho-h|)\, d\rho \\
&= -2\pi\frac{G}{h}\mu\int_0^r 2\rho^2\, d\rho \\
&= -\frac{G}{h}\frac{4\pi r^3}{3}\mu = -\frac{GM}{h}\,.
\end{aligned}$$

Otteniamo così lo stesso potenziale gravitazionale di un corpo avente tutta la sua massa concentrata nell'origine.