Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 19.09.23

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2022/2023

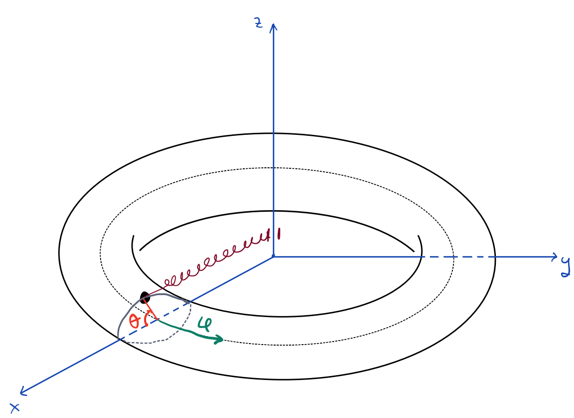
Esercizio 1

1. Dare la definizione di funzionale facendo un esempio esplicito. [1,5pt]
2. Dare la definizione di variazione di un funzionale e di punto di stazionarietà. Per l'esempio esplicito fornito al punto precedente, si calcolino le funzioni che rendono stazionario il funzionale scelto. [1,5pt]

Si consideri un sistema Lagrangiano a un grado di libertà ($n = 1$), con coordinata libera q.

3. Scrivere il funzionale azione S e calcolare la sua variazione δS. [2pt]
4. Si enunci e si dimostri il "Principio di Hamilton". [3pt]
5. Si scriva il funzionale azione S per il repulsore armonico ($n = 1$) di frequenza ω, si calcoli la sua variazione e si dimostri che la funzione $q(t) = e^{\omega t}$ rende stazionario S. [2pt]
6. Si usi il principio di Hamilton per dimostrare che "Lagrangiane che differiscono per una derivata totale sono equivalenti". [2pt]
7. *Facoltativo: Si usi il principio di Hamilton per dimostrare la proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate. [1pt]*

Esercizio 2



Un punto materiale di massa m è vincolato a un toro 2-dimensionale di equazioni parametriche

$$x = (R + r\cos\theta)\,\cos\varphi\,, \qquad y = (R + r\cos\theta)\,\sin\varphi\,, \qquad z = r\,\sin\theta\,,$$

con $R > r$ (dove r e R sono i raggi dei cerchi del toro). Il punto è connesso all'asse z del sistema Cartesiano da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla (che rimane sempre parallela al piano xy).

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli θ, φ. [2pt].
2. Scrivere l'equazione di Lagrange del sistema relativa alla coordinata φ. [1pt].
3. Individuare la coordinata ciclica e scrivere la relativa costante del moto. [0,5pt].
4. Scrivere la Lagrangiana ridotta a un grado di libertà. [1pt]
5. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema ridotto, discutendone la stabilità [4pt].
6. Si ponga $k = 0$. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni del problema ridotto attorno al punto di equilibrio stabile e linearizzare la Lagrangiana ridotta [1,5pt].
7. Si ponga ancora $k = 0$. Si tracci il grafico dell'energia potenziale efficace e il diagramma di fase [1pt].
8. *Facoltativo: si prenda il caso di piccole oscillazioni del problema ridotto per* $k = 0$ *e si dica qual è la condizione sui parametri affinché la traiettoria sul toro si chiuda. [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1. Scrivere, l'Hamiltoniana di tale sistema e la relativa equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x)$ ed energia E [1pt].

Si considerino le ridefinizioni $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q\right) = \varphi(q)$, $E = \lambda\hbar\omega$. Scrivendo l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ e inserendo $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ in tale equazione, si trova la seguente equazione per $\theta(q)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

Si ponga $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$.

2. Calcolare le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$ [1pt].
3. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r(r-1) = 0$ [1pt].
4. Determinare lo spettro dell'energia (e in particolare il valore minimo) [1,5pt].
5. Si trovi l'autofunzione $\psi_1(x)$ relativa al primo livello eccitato dell'energia [1pt].
6. Sia $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right)$ e $A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right)$ l'operatore coniugato. Si scriva come agisce l'operatore $A^\dagger A$ su una generica funzione d'onda e si trovi il valor medio dell'osservabile $A^\dagger A$ nello stato $\psi_1(x)$ determinato al punto precedente *(suggerimento: non serve saper risolvere integrali gaussiani)* [1,5pt].