Nome .... **Cognome** ....

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Prova scritta di Geometria per Ingegneria Navale e Industriale

VII appello d'esame — A. A. 2022-2023

18/9/2023

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla nel relativo foglio. Non occorre giustificare le risposte a crocette. Ciascuna domanda a risposta multipla giusta vale 0,5 punti.

Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30). Le risposte agli esercizi vanno brevemente giustificate. Per essere ammessi all'orale servono almeno 15 punti.

Domande a risposta multipla

1) Quale delle seguenti matrici è a gradini?

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono simili se e solo se $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che

$\boxed{\text{A}}$ $B = M^{-1}AM$

$\boxed{\text{B}}$ $B = A^{-1}MA$

$\boxed{\text{C}}$ $B = {}^tMAM$

$\boxed{\text{D}}$ $B = {}^tAMA$

3) I vettori $(0, t, \sqrt{3})$ e $(t, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti

$\boxed{\text{A}}$ per nessun valore di $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{B}}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{C}}$ per ogni $t \neq 0$

$\boxed{\text{D}}$ solo per $t = 0$

4) In $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard, l'angolo tra i vettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $\frac{\pi}{3}$

5) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare non suriettiva. Allora

$\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{rg} f = 1$ $\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{rg} f < 2$ $\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{rg} f = 2$

6) Il sottoinsieme $L \subset \mathbb{R}^3$ definito da

$$L\colon \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

è

$\boxed{\text{A}}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ con $\dim L = 2$

$\boxed{\text{B}}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ con $\dim L = 1$

$\boxed{\text{C}}$ lo spazio nullo

$\boxed{\text{D}}$ l'insieme vuoto

7) Sia $U = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$. Rispetto al prodotto scalare canonico si ha

$\boxed{\text{A}}$ $U^\perp = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{B}}$ $U^\perp = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $U^\perp = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8) La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

è ortogonale $\boxed{\text{A}}$ vero $\boxed{\text{B}}$ falso

Esercizi

1) *(12 punti)* Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x-y \end{pmatrix}$$

(a) *(2 punti)* Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) *(1 punto)* f è un automorfismo?

(c) *(1 punto)* f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico?

(d) *(5 punti)* Determinare una base diagonalizzante per f.

(e) *(3 punti)* Determinare una matrice $U \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, la sua inversa, e una matrice diagonale D tali che $D = U^{-1}AU$.

2) *(7 punti)* Risolvere il seguente sistema reale dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando anche la struttura dello spazio delle soluzioni e la sua dimensione

$$\begin{cases} x + ky - kz = k+1 \\ kx + y - z = 0 \end{cases}$$

3) *(7 punti)* Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i punti

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *(3 punti)* Dopo aver verificato che A, B, C non sono allineati, determinare in forma cartesiana il piano H passante per questi punti.

(b) *(4 punti)* Determinare una base ortonormale per la giacitura di H e completarla ad una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$.