

Calcolo delle Probabilità Corso Progredito

Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche e Attuariali
Università degli Studi di Trieste

Calcolo delle Probabilità

- Argomenti:

- ▶ Spazi di probabilità
- ▶ Probabilità condizionata e Indipendenza
- ▶ Variabili aleatorie e misurabilità
- ▶ Speranza matematica
- ▶ Legge di una variabile aleatoria
- ▶ Variabili aleatorie multivariate
- ▶ Speranza matematica condizionata
- ▶ Convergenza di successioni di variabili aleatorie e teoremi limite
- ▶ Processi stocastici

Calcolo delle Probabilità

- Testi per il corso
 - ▶ *Probability - An Introduction*, G. Grimmett, D. Welsh, OUP, 2a edizione, 2014
↪ di base, copre adeguatamente il programma del corso
 - ▶ *Probability and Random Processes*, G. Grimmett, D. Stirzaker, OUP, 3a edizione, 2001
↪ molto ampio, la prima metà copre il corso mentre il resto si concentra su processi stocastici; numerosi esercizi (più *One Thousand Exercises in Probability* degli stessi autori)
 - ▶ *Probability Essentials*, J. Jacod, P. Protter, Springer, 2a edizione, 2004
↪ conciso ma matematicamente rigoroso

Spazi di Probabilità

Calcolo delle Probabilità

- Modello matematico per la descrizione e valutazione dell'incertezza
 - ▶ approccio assiomatico basato sulla *Teoria della Misura*
 - ▶ eventi \equiv insiemi, probabilità \equiv misura
 - ▶ approccio non “costruttivo”

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 1) Ω = insieme di possibili **risultati** di un **esperimento**
 - ▶ elementi (risultati): $\omega \in \Omega$
 - ▶ ω = **stato del mondo/stato di natura**
 - ▶ una volta che l'esperimento è terminato, **uno e uno solo** $\omega^* \in \Omega$ sarà verificato

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) \mathcal{F} = insieme di eventi **di interesse per l'esperimento**
 - ▶ evento: **sottoinsieme di** Ω , se $A \in \mathcal{F}$ allora $A \subset \Omega$
 - ▶ evento: ente logico che può essere vero (V) o falso (F)
 - ▶ se ω^* si verifica, allora A è V o F se $\omega^* \in A$ o $\omega^* \notin A$

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) \mathcal{F} = insieme di eventi **di interesse per l'esperimento**
 - ▶ \mathcal{F} rappresenta l'**informazione** ottenibile dall'esperimento \rightsquigarrow il **valore logico** di ogni evento in \mathcal{F} verrà rivelato alla fine dell'esperimento
 - ▶ non necessariamente ogni sottoinsieme di Ω è in \mathcal{F} (è un evento)
 - ▶ la scelta di \mathcal{F} è guidata da natura del problema e convenienza matematica

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 3) P **probabilità**: per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, un numero

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ $P(A)$: misura di fiducia che A sia V (prima dell'esperimento)
- ▶ se $P(A) = 0$: è “**quasi certo**” che A sia F
- ▶ se $P(A) = 1$: è “**quasi certo**” che A sia V
- ▶ $P(A) > P(B)$: l'evento A è più probabile di B

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi (\rightsquigarrow diagrammi di Venn)
 - ▶ $\Omega =$ “universo” = **evento certo**: sempre V
 - ▶ $\emptyset =$ insieme vuoto = **evento impossibile**: sempre F
 - ▶ $A^c = \bar{A} =$ complementare di $A =$ “**non A**”: V/F se e solo se A è F/V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

- ▶ $A \cup B =$ unione di A e $B =$ “ A o B ”: V se A è V o B è V
 \rightsquigarrow unione non esclusiva!

- ▶ per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se **almeno uno** degli A_α è V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
 - ▶ $A \cap B =$ intersezione di A e $B =$ “ A e B ”: V se A è V o B è V
 - ▶ per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se **ognuno** degli A_α è V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

- ▶ $A - B = A$ meno $B =$ "A e non B": V se A è V e B è F

- ▶ $\bar{A} = \Omega - A$

- ▶ $A \Delta B =$ differenza simmetrica di A e B = A o B, ma non entrambe: V se A è V e B è F, o viceversa \rightsquigarrow unione esclusiva

- ▶ inclusione tra insiemi $A \subset B$: se A è V allora B è V

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

- ▶ A e B sono **disgiunti** se $A \cap B = \emptyset$: A e B sono **incompatibili** \rightsquigarrow non si possono verificare entrambi
- ▶ gli eventi di una famiglia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono **a due a due disgiunti** se

$$A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

per ogni $\alpha \neq \beta \rightsquigarrow$ al più uno degli eventi si può verificare

- ▶ gli eventi di una famiglia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono **esaustivi** se

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \Omega$$

\rightsquigarrow uno degli eventi si verifica certamente

Eventi e Insiemi

- **Partizione** di Ω : una famiglia di eventi $\mathbb{P} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ tale che
 - ▶ $A_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in I$
 - ▶ a due a due disgiunti
 - ▶ esaustivi
- Una partizione permette di rappresentare l'incertezza in eventi incompatibili di cui uno sicuramente si verifica (“puzzle”)
- Caso tipico: \mathbb{P} **discreta** (\equiv finita o numerabile)

Spazi di Probabilità

- Modello per esperimenti combinati/ripetuti: **spazio prodotto** (prodotto cartesiano)
 - ▶ esperimento 1 (Ω_1) seguito da esperimento 2 (Ω_2) ... seguito da esperimento n (Ω_n):

$$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, \dots, n\}$$

- ▶ esperimento ripetuto n volte ($\Omega_i = \Omega$ per ogni i):

$$\Omega^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega, i = 1, \dots, n\}$$

- ▶ i risultati di un esperimento **non influenzano** gli esiti degli altri
- ▶ **sequenza infinita** di esperimenti: e.g. $\Omega^\infty \equiv \Omega^{\mathbb{N}}$

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
 - ▶ lancio di una moneta
 - ▶ lancio di un dado
 - ▶ lancio di due/ n / ∞ monete
 - ▶ lancio di un dado seguito da un lancio di una moneta
 - ▶ lancio un dado e poi lancio una moneta tante volte quanto è il risultato del dado
 - ▶ estrazione di 5 carte da un mazzo di 52
 - ▶ partita di calcio

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
 - ▶ prezzo di una azione/ n azioni
 - ▶ numero di sinistri in un portafoglio di n contratti
 - ▶ numero di sinistri e danno totale in un portafoglio assicurativo
 - ▶ prezzo di una azione nel tempo
 - ▶ durata di vita alla nascita di un individuo/ n individui
- esempi di eventi incompatibili, esaustivi, unione, intersezione, differenza, . . .

Spazi di Probabilità

- Definizione formale di **spazio di probabilità** (assiomi di Kolmogorov, 1933): una tripla

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

con

- 1 Ω : insieme non vuoto \rightsquigarrow risultati possibili
- 2 \mathcal{F} : σ -algebra di sottoinsiemi di Ω \rightsquigarrow eventi di interesse
- 3 P **probabilità** su (Ω, \mathcal{F}) \rightsquigarrow misura dell'incertezza

Spazi di Probabilità

- \mathcal{F} è una **σ -algebra** di sottoinsiemi di Ω (gli elementi di \mathcal{F} sono sottoinsiemi di Ω):

▶ [\mathcal{F} 1] $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathcal{F}$

▶ [\mathcal{F} 2, chiusura per **complementazione**]
per ogni $A \in \mathcal{F}$ anche $\bar{A} \in \mathcal{F}$

▶ [\mathcal{F} 3, chiusura per **unioni/intersezioni numerabili**]
per ogni successione $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ di eventi in \mathcal{F} , allora

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Spazi di Probabilità

- La coppia (Ω, \mathcal{F}) è uno **spazio misurabile**;
una **probabilità** P su (Ω, \mathcal{F}) è una applicazione

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

tale che

- ▶ [**P1, misura unitaria**] $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- ▶ [**P2, σ -additività**] per ogni successione $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ di eventi **a due a due disgiunti** in \mathcal{F}

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

- Se $P(A) = 1$, A è **quasi certo** (si scrive A q.c.)

Spazi di Probabilità

- Esercizio. Rappresentare come spazi di probabilità i seguenti esempi
 - ▶ lancio di una moneta
 - ▶ lancio di un dado
 - ▶ come σ -algebra, utilizzare l'insieme delle parti di Ω

$$2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$$

[tutti i sottoinsiemi di Ω]

σ -Algebra

- Nella definizione di σ -algebra
 - ▶ in [\mathcal{F} 1] basta richiedere che $\emptyset \in \mathcal{F}$ oppure che $\Omega \in \mathcal{F}$ oppure che \mathcal{F} sia non vuoto
 - ▶ in [\mathcal{F} 3] basta richiedere che \mathcal{F} sia chiuso rispetto a unioni numerabili oppure a intersezioni numerabili \rightsquigarrow formule di **de Morgan**
- Ogni σ -algebra è chiusa per unioni o intersezioni **finite**

σ -Algebra

- Perché si richiedono $[\mathcal{F}1]$, $[\mathcal{F}2]$, $[\mathcal{F}3]$?
 - ▶ l'evento certo e quello impossibile sono sicuramente noti
 - ▶ se A è noto a esperimento terminato, tale sarà \bar{A}
 - ▶ se A_1, \dots, A_n sono eventi rivelati noti alla fine dell'esperimento, tali saranno

$$A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad A_1 \cap \dots \cap A_n$$

estendere questa proprietà a successioni numerabili è fatto per
convenienza matematica

- Ogni operazione (finita o numerabile) su eventi di una σ -algebra dà come risultato eventi della σ -algebra

σ -Algebra

- \mathcal{A} è un'algebra di sottoinsiemi di Ω se

- ▶ [$\mathcal{A}1$] $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$

- ▶ [$\mathcal{A}2$] per ogni $A \in \mathcal{F}$ anche $\bar{A} \in \mathcal{A}$

- ▶ [$\mathcal{A}3$] per ogni A_1, \dots, A_n di elementi di \mathcal{A} , allora

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}, \quad A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$$

- Ogni σ -algebra è un algebra, non viceversa (a meno che Ω o \mathcal{A} siano finiti)
- Esercizio. Ω infinito, $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ finito o cofinito}\}$ è un'algebra ma non una σ -algebra

σ -Algebra

- Esempi di σ -algebra

- ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega \rightsquigarrow$ la più grande σ -algebra su Ω , σ -algebra discreta

- ▶ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} \rightsquigarrow$ la più piccola σ -algebra su Ω , σ -algebra triviale

- ▶ se $A \subset \Omega$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$

- Ogni σ -algebra \mathcal{F} su Ω è tale che

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F} \subset 2^\Omega$$

σ -Algebra

- \mathcal{F} rappresenta l'**informazione** ottenibile dall'esperimento \rightsquigarrow il **valore logico** di ogni evento in \mathcal{F} verrà rivelato alla fine dell'esperimento \rightsquigarrow più grande è \mathcal{F} , maggiore l'informazione
 - ▶ σ -algebra triviale \rightsquigarrow **nessuna** informazione
 - ▶ σ -algebra discreta \rightsquigarrow **massima** informazione
- \mathcal{G}, \mathcal{F} sono σ -algebra su Ω
 - ▶ $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ ha più informazione di \mathcal{G}
 - ▶ $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ è una σ -algebra \rightsquigarrow informazione **in comune** tra \mathcal{F} e \mathcal{G}
 - ▶ $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$ **non è** in generale una σ -algebra

- Esercizio. Partita di calcio: $\Omega = \{1, X, 2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_1 =$ informazione di chi osserva (solo) se la squadra di casa ha vinto o meno
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_2 =$ informazione di chi osserva (solo) se la squadra in trasferta ha vinto o meno
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
 - ▶ verificare che $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ non è una σ -algebra

σ -Algebra

- Più in generale, se $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una famiglia arbitraria di σ -algebrae su Ω , tale è

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

- σ -algebra generata da un insieme \mathcal{C} di sottoinsiemi di Ω
 - ▶ come costruire una σ -algebra che contiene gli eventi in \mathcal{C} “e niente altro”?
 - ▶ costruzione “da fuori” utilizzando il risultato precedente

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{C} \subset \mathcal{G} \}$$

σ -Algebra

- La σ -algebra generata da \mathcal{C} può essere caratterizzata come l'unico insieme di eventi $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ tale che
 - ▶ \mathcal{F} è una σ -algebra
 - ▶ $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$
 - ▶ per ogni altra σ -algebra \mathcal{G} tale che $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, riesce $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

σ -Algebra

- Quindi la σ -algebra generata da \mathcal{C}
 - ▶ è la più piccola σ -algebra che contiene \mathcal{C}
 - ▶ contiene tutti gli insiemi costruibili partendo da quelli di \mathcal{C} (con operazioni numerabili)
- A parte alcuni casi “semplici”, non è in generale possibile descrivere gli insiemi di $\sigma(\mathcal{C})$
- Come definire la condivisione (unione) delle informazioni?

σ -Algebra

- Tre proprietà (ovvie) della σ -algebra generata

- ▶ \mathcal{F} σ -algebra $\iff \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F})$

- ▶ \mathcal{F} σ -algebra, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$

- ▶ $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$

- Esercizio. Chi è $\sigma(\mathcal{C})$ quando (i) $\mathcal{C} = \emptyset$ (ii) $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$ (iii) $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ (iv) $\mathcal{C} = \{A\}$ con $\emptyset \neq A \neq \Omega$

- **Partizione generata** da una famiglia di insiemi

- ▶ se $\mathcal{C} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$, la partizione generata da \mathcal{C} è

$$\mathbb{P}_G(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} A'_\alpha \neq \emptyset \mid A'_\alpha = A_\alpha \text{ o } A'_\alpha = \overline{A_\alpha} \text{ per ogni } \alpha \in I \right\}$$

- ▶ $\mathbb{P}_G(\mathcal{C})$: partizione meno fine per cui ogni insieme di \mathcal{C} si può ottenere come unione di suoi insiemi
- ▶ \mathbb{P}_1 è più fine di \mathbb{P}_2 se ogni insieme di \mathbb{P}_2 è unione di insiemi di \mathbb{P}_1

σ -Algebra

- Caso in cui si riesce a descrivere la σ -algebra generata

▶ Se $\mathbb{P} = (A_n)_{n \geq 1}$ è una partizione discreta, allora $(\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\})$

$$\sigma(\mathbb{P}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N}_+ \right\}$$

▶ Se $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$ insieme finito, riesce

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathbb{P}_G(\mathcal{C}))$$

- Esercizio. Descrivere $\sigma(\{A, B\})$ con (i) A, B “generici” (ii) $A \subset B$ (iii) A, B incompatibili

σ -Algebra

- σ -Algebra di Borel in \mathbb{R}

- ▶ su $\Omega = \mathbb{R}$, si considera la σ -algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ dove

$$\mathcal{C} = \{\text{intervalli di } \mathbb{R}\}$$

- ▶ \mathcal{B} contiene ogni insieme ottenibile dagli intervalli tramite unioni, intersezioni (numerabili), complementazioni, ...
- ▶ ogni insieme di interesse pratico è in \mathcal{B} , tuttavia $\mathcal{B} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$
- ▶ insiemi in \mathcal{B} : **boreliani**

σ -Algebra

- Riesce $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_i) \ i = 1, \dots, 5$ con
 - ▶ $\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $\mathcal{C}_2 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $\mathcal{C}_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $\mathcal{C}_4 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $\mathcal{C}_5 = \{\text{insiemi aperti di } \mathbb{R}\}$
- Altre scelte di insiemi generatori sono possibili

σ -Algebra

- σ -Algebra sullo spazio prodotto

- ▶ $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$

- ▶ su $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ si considera la σ -algebra prodotto

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C})$$

dove

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, n\}$$

$A_1 \times \dots \times A_n$: iper-rettangoli

- ▶ caso particolare: $\Omega_i = \Omega$, $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}$, lo spazio è $(\Omega^n, \mathcal{F}^{\otimes n})$

- ▶ se $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ e Ω_i è unione discreta di insiemi di \mathcal{C}_i , per ogni i

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n\})$$

σ -Algebra

- σ -Algebra di Borel in \mathbb{R}^n , indicata con \mathcal{B}^n

▶ $\mathcal{B}^n \equiv \mathcal{B}^{\otimes n} \equiv \mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}$ cioè

$$\mathcal{B}^n = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{B}\})$$

- ▶ in base al risultato precedente, \mathcal{B}^n è generato da **iper-rettangoli (limitati o illimitati)**

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^n &= \sigma(\{(-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n] \mid a_i \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\})\end{aligned}$$

- ▶ ogni insieme di interesse pratico è in \mathcal{B}^n
- ▶ insiemi in \mathcal{B}^n : **boreliani**

Proprietà della Probabilità

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, $A, B \in \mathcal{F}$
 - ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A, B incompatibili
 - ▶ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 - ▶ [monotonia] se $A \subset B$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

e quindi $P(A) \leq P(B)$

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proprietà della Probabilità

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$
 - ▶ [finita additività] se A_1, \dots, A_n sono a due a due disgiunti

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

- ▶ [formula di inclusione-esclusione]

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

- ▶ [finita subadditività]

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

Proprietà della Probabilità

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio di probabilità, successione (A_n) di eventi con $A_n \in \mathcal{F}$ per ogni n
 - ▶ (A_n) è **monotona non decrescente** se $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni n , e si pone $\lim_n A_n = \cup_n A_n$ e si scrive $A_n \uparrow A$
 - ▶ (A_n) è **monotona non crescente** se $A_n \supset A_{n+1}$ per ogni n , e si pone $\lim_n A_n = \cap_n A_n$ e si scrive $A_n \downarrow A$
 - ▶ [**monotonia/continuità dal basso/alto**] se (A_n) è monotona

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$$

- ▶ [**subadditività**]

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

Proprietà della Probabilità

- (Ω, \mathcal{F}, P) spazio misurabile, $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tale che
 - ▶ $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
 - ▶ [finita additività] $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A, B \in \mathcal{F}$ sono incompatibili

allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

- 1 P è σ -additiva (P è una probabilità)
- 2 P è continua dal basso
- 3 P è continua dall'alto

Proprietà della Probabilità

- Spazio di probabilità **discreto**:

▶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ (finito o numerabile)

▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega$

▶ ogni P su questo spazio può essere assegnata tramite p_1, p_2, \dots con

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \text{ per ogni } i \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

e ponendo, per $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$$

- Esempio. Su $\Omega = \mathbb{N}$, $p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ con $\lambda > 0$; su $\Omega = \mathbb{N}_+$, $p_i = \frac{1}{2^i}$

Proprietà della Probabilità

- **Equiprobabilità su uno spazio finito:**

- ▶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

- ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- ▶ $p_i = \frac{1}{n}$ per ogni i , così riesce per $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{n} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

dove $\#A =$ numerosità di A

- Schema tipico di giochi in condizioni di simmetria: lancio di dadi, monete, estrazioni di carte, roulette, estrazioni da urne, ...

Proprietà della Probabilità

- Esercizio. Lancio di due dadi
 - ▶ descrivere lo spazio di probabilità
 - ▶ calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ dove $A =$ “la somma dei dadi è 7”, $B =$ “il massimo dei dadi è 5”
- Esercizio. Lancio di n monete
 - ▶ descrivere lo spazio di probabilità
 - ▶ calcolare le probabilità di $E_i =$ “esce testa al lancio i ”, $A_i =$ “esce testa per la prima volta al lancio i ”, $B =$ “escono teste e croci in ugual numero”, $C_i =$ “escono esattamente i teste”