Giulio Cesare Barozzi, Giovanni Dore, Enrico Obrecht

Elementi di analisi matematica - Volume 1

Zanichelli

0 Insiemi, funzioni, numeri

Esercizi

0.1. Il linguaggio degli insiemi

0.1.1. Esercizio Poniamo

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4\}, \quad C = \{3, 5, 6\}, \quad D = \{4, 5, 6\}.$$

Determinare l'insieme delle parti degli insiemi A, B, C, D.

Si osservi che $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

0.1.2. Esercizio Poniamo

$$U = \{1, 2\}, \qquad V = \{\{1\}, \{2\}\},$$
$$W = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \qquad X = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

(1) $U = V$;
(2) $U \subseteq V$;
(3) $U \subseteq W$;
(4) $U \in V$;
(5) $U \subseteq X$;
(6) $V \subseteq W$;
(7) $V \subseteq X$;
(8) $V \in X$;
(9) $U \in X$.

0.1.3. Esercizio Verificare le seguenti proprietà dell'unione e dell'intersezione:

(1) $A \subseteq A \cup B$;
(2) $B \subseteq A \cup B$;
(3) $A \cup A = A$;
(4) $A \cup \emptyset = A$;
(5) $(A \cup B) = A$ se, e solo se $B \subseteq A$;
(6) $A \cap B \subseteq A$;

(7) $A \cap B \subseteq B$;
(8) $A \cap A = A$;
(9) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
(10) $A \cap B = A$ se, e solo se, $A \subseteq B$;

0.1.4. Esercizio Verificare le seguenti proprietà della differenza tra insiemi:

(1) $A \setminus B \subseteq A$;
(2) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;
(3) $A \setminus A = \emptyset$;
(4) $A \setminus \emptyset = A$;
(5) $\emptyset \setminus A = \emptyset$;
(6) $A \setminus B = A$ se, e solo se, $A \cap B = \emptyset$;
(7) $A \setminus B = \emptyset$ se, e solo se, $A \subseteq B$.

0.4. Relazioni

0.4.1. Esercizio Si consideri la relazione in $\mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 1 \right\} .$$

Stabilire se $\mathcal{R}_1$ è riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica.

0.4.2. Esercizio Si consideri la relazione in ${\mathbb{Z}^*}^2$

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) \in {\mathbb{Z}^*}^2 \times {\mathbb{Z}^*}^2 \;\middle|\; a_1 b_2 = a_2 b_1 \right\} .$$

Stabilire se $\mathcal{R}_2$ è riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica.

0.4.3. Esercizio Sia p un intero ≥ 2 ; diciamo che gli interi n e m sono *congrui modulo* p , e scriviamo $n \equiv m \pmod p$, se p divide la differenza $n - m$:

$$n \equiv m \pmod p \qquad \iff \qquad \exists q \in \mathbb{Z} \colon \quad n - m = qp .$$

Verificare che la congruenza modulo p è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathbb{Z}$ e che lo spazio quoziente è costituito da p classi: precisamente le classi $[0], [1], \ldots, [p-1]$. Confrontare con quanto esposto nell'Es. 0.4.6.

0.5. Funzioni

0.5.1. Esercizio Posto $A = \{ 1, 2, 3 \}$, dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $A \times A$ sono funzioni di dominio A :

(1) $F_1 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 1) \}$;
(2) $F_2 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 2) \}$;
(3) $F_3 = \{ (1, 1), (2, 2) \}$.

0.5.2. Esercizio Siano A e B insiemi e $f \colon A \to B$. Si consideri la relazione in A

$$\mathcal{R}_3 = \{ (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \} .$$

Dimostrare che $\mathcal{R}_3$ è una relazione di equivalenza.

0.5.3. Esercizio Sia U un insieme. Se $A \subseteq U$ e $B \subseteq U$, dimostrare che:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Trovare un esempio per cui l'inclusione al punto (2) è stretta. Determinare una condizione sufficiente su f, affinché al punto (2) valga l'uguaglianza.

0.5.4. Esercizio Stabilire quali delle seguenti funzioni sono iniettive e quali suriettive.

(1) $g_1 \colon \{1,2,3\} \to \{1,2\}$, $g_1(1) = 1$, $g_1(2) = 2$, $g_1(3) = 1$;
(2) $g_2 \colon \{1,2\} \to \{1,2\}$, $g_2(1) = 2$, $g_2(2) = 1$;
(3) $g_3 \colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$, $g_3(1) = 3$, $g_3(2) = 2$, $g_3(3) = 4$.

0.5.5. Esercizio Stabilire quali delle seguenti funzioni sono iniettive e quali suriettive.

(1) $g_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_4(x) = x$;
(2) $g_5 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_5(x) = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \le 0\,, \\ x+1\,, & \text{se } x > 0\,; \end{cases}$
(3) $g_6 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_6(x) = x^2$.

0.5.6. Esercizio Sia $g_7 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ la funzione che associa ad ogni numero naturale la lunghezza della sua rappresentazione decimale, cioè il numero di cifre che compongono tale rappresentazione. Ad esempio: $g_7(2) = 1$, $g_7(101) = 3$, $g_7(1003) = 4$. Stabilire se g_7 è iniettiva e se è suriettiva.

0.5.7. Esercizio Sia $g_8 \colon \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la funzione che associa ad ogni coppia di numeri interi positivi il loro massimo comune divisore. Stabilire se g_8 è iniettiva e se è suriettiva.

0.5.8. Esercizio Determinare la funzione inversa delle funzioni definite nell'Esercizio 0.5.4 che sono iniettive.

0.5.9. Esercizio Determinare la funzione inversa delle funzioni definite nell'Esercizio 0.5.5 che sono iniettive.

0.5.10. Esercizio Determinare le funzioni composte $g_i \circ h_i$ e $h_i \circ g_i$ per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

(1) $g_9(x) = 1 - 2x$, $h_9(x) = x - 2$;
(2) $g_{10}(x) = x^2 - 1$, $h_{10}(x) = 1/(x^2+1)$;
(3) $g_{11}(x) = x + 2$, $h_{11}(x) = x - 2$.

0.5.11. Esercizio Scrivere ciascuna delle seguenti funzioni come composizione di due funzioni (possono esserci più soluzioni):

(1) $g_{12} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_{12}(x) = x^3 + 1$;
(2) $g_{13} \colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -1\} \to \mathbb{R}$, $g_{13}(x) = \sqrt{x+1}$;
(3) $g_{14} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_{14}(x) = (x+2)^4$;
(4) $g_{15} \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g_{15}(x) = 1 + 1/x + 1/x^2$.

0.6. Numeri reali

0.6.1. Esercizio Dimostrare che si ha, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$xy \le \frac{x^2 + y^2}{2}\,.$$

Verificare che si ha uguaglianza se, e solo se, $x = y$.

0.6.2. Esercizio Dimostrare che si ha, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}\,;$$

cioè che la *media geometrica* di due numeri non negativi non supera la loro *media aritmetica*.

(*Suggerimento*: confrontare i rispettivi quadrati.)

0.6.3. Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $5x - 2 \leq 0\,;$

(2) $3x - \sqrt{2} > 0\,;$

(3) $\dfrac{x+2}{x} < 1\,;$

(4) $3 + \dfrac{2}{x} \geq 4\,;$

(5) $\dfrac{x+5}{x+2} \leq 2\,.$

0.6.4. Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $|x-2| > 1/4\,;$

(2) $\big||x-1| - 2\big| \leq 1\,.$

0.6.5. Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $x^2 \geq 9\,;$

(2) $x^2 < -1\,;$

(3) $(x+2)^2 \leq 16\,;$

(4) $(x+1)(x-2) \leq 0\,;$

(5) $x^2 - 2x + 1 > 0\,;$

(6) $x^2 - 2 < x + 5\,;$

(7) $(x^2-1)\,(x^3+1) < 0\,;$

(8) $(x^2+1)\,(x^2-3x+2) \leq 0\,.$

0.6.6. Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $\dfrac{1-3x}{2x+1} < \dfrac{x-1}{x+1}\,;$

(2) $\dfrac{x^4-1}{x^3+1} < 0\,.$

0.6.7. Esercizio Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $-\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2} - 2\,;$

(2) $\sqrt{x+1/x} - \sqrt{x+1} > 0\,;$

(3) $\sqrt{x^2-x+1} \geq 2x+1\,.$

0.6.8. Esercizio Posto $A = \{\, n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$, determinare $\inf A$ e $\sup A$; inoltre stabilire se essi sono, rispettivamente, minimo e massimo di A.

0.6.9. Esercizio Siano A e B insiemi non vuoti di numeri reali; supponiamo $A \subseteq B$ e B limitato. Dimostrare che

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B\,.$$

0.7. Numeri naturali, interi, razionali

0.7.1. Esercizio Fissato $N \in \mathbb{N}$, sia $p(n)$ una frase aperta definita per ogni naturale $n \geq N$. Dimostrare che $p(n)$ è vera per ogni $n \geq N$ se:

(1) $p(N)$ è vera;
(2) $\forall n \geq N$, se $p(n)$ è vera, allora $p(n+1)$ è vera.

(*Suggerimento*: i numeri n in considerazione si possono scrivere $n = N + k$, con $k \in \mathbb{N}$.)

0.7.2. Esercizio Dimostrare per induzione le seguenti disuguaglianze:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geq n$;
(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq 2^{n-1}$;
(3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq n2^n$;
(4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $2^n + 4^n \leq 5^n$.

Le disuguaglianze (1), (2) e (4) sono vere anche per valori di n diversi da quelli indicati?

0.7.3. Esercizio Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

0.7.4. Esercizio Dimostrare per induzione le seguenti disuguaglianze:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}\, x^2$;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$, $\dfrac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - nx$.

0.7.5. Esercizio Verificare che se $p(n)$ è la proposizione "$n \geq n+1$", allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ (a parole: se n fosse maggiore o uguale a $n+1$, allora $n+1$ sarebbe maggiore o uguale a $n+2$); tuttavia la proposizione $p(n)$ è falsa per ogni naturale n.

Si rifletta sul fatto che da una premessa falsa si può dedurre, *ragionando correttamente*, una conseguenza falsa.

0.7.6. Esercizio La *progressione aritmetica* di primo elemento a e ragione d può essere definita per induzione ponendo

$$a_n = \begin{cases} a\,, & \text{se } n = 0\,, \\ a_{n-1} + d\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che $a_n = a + nd$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dimostrare per induzione che la somma dei termini di indice non superiore a n è uguale a $(n+1)(a + nd/2)$. Quest'ultima quantità è uguale al prodotto di $n+1$ (cioè il numero degli addendi sommati) per la semisomma tra il primo e l'ultimo termine considerato.

Per $a = 0$ e $d = 1$ si ritrovi il risultato dell'Es. 0.7.6.

0.7.7. Esercizio Dati $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}^*$, dimostrare l'esistenza dei naturali q ed r tali che

$$n = qm + r, \quad \text{con } 0 \le r < m,$$

procedendo per induzione rispetto ad n. Si tratta del *quoziente* e del *resto* della *divisione* di n per m.

0.9. Elementi di analisi combinatoria

0.9.1. Esercizio Scrivere le disposizioni a 2 a 2 dei 3 elementi a, b, c.

0.9.2. Esercizio Scrivere le combinazioni a 2 a 2 dei 4 elementi a, b, c, d.

0.9.3. Esercizio Quanti numeri naturali, con una rappresentazione decimale costituita da quattro cifre diverse, si possono rappresentare utilizzando le cifre $1, 2, 3, 4$?

0.9.4. Esercizio Quanti numeri naturali hanno una rappresentazione decimale costituita da tre cifre tra le quali non compare il 2? E se invece non compare lo 0?

0.9.5. Esercizio In quanti modi si possono allineare cinque soldati?

0.9.6. Esercizio Quanti ambi, terne, quaterne, cinquine si possono formare con i novanta numeri del Lotto?

0.9.7. Esercizio Quanti sono i modi di anagrammare la parola *Roma*?

0.9.8. Esercizio Una carta geografica contiene quattro paesi. Se si dispone di sei colori e si colora ciascun paese in colore diverso, in quanti modi può essere colorata la carta?

0.9.9. Esercizio Il paese di Pieve di Sotto è collegato con Pieve di Sopra da tre diverse strade; in quanti modi si può organizzare un viaggio da Pieve di Sotto a Pieve di Sopra e ritorno? Quanti sono i diversi modi se si aggiunge la condizione che il viaggio di ritorno si faccia per una strada diversa da quella di andata?

0.9.10. Esercizio Un questionario a risposta multipla contiene 20 domande, per ciascuna delle quali sono previste quattro possibili risposte; in quanti modi può essere compilato un tale questionario?

0.9.11. Esercizio In quanti modi nove ragazzi possono essere sistemati in tre stanze triple?

0.9.12. Esercizio Per un certo esperimento si dispone di cinque coppie di ratti (maschio e femmina in ogni coppia). Dovendo scegliere due maschi e due femmine senza scegliere maschio e femmina della stessa coppia, quante scelte diverse si possono compiere?

0.9.13. Esercizio I contachilometri delle automobili, mostrano, in generale, sei cifre; quante diverse configurazioni possono assumere?

0.9.14. Esercizio Sviluppare mediante la formula del binomio (0.9.7) le seguenti espressioni:

(1) $(a + b)^4$;
(2) $(1 + x)^5$;
(3) $(x - y)^3$;
(4) $(2a + b)^4$;
(5) $(2x - y)^3$;

(6) $(1-t)^4$.

0.9.15. Esercizio Sia A un insieme che contiene n elementi, dimostrare che il numero dei suoi sottoinsiemi è 2^n .

(*Suggerimento*: si deve calcolare la somma dei coefficienti binomiali di indice superiore n ; è ciò che si ottiene nella formula del binomio (0.9.7), ponendo $a = b = \dots$.)

0.9.16. Esercizio Sia n un numero pari, $n = 2m$, con $m > 0$. Dimostrare che il più grande tra i coefficienti binomiali di indice superiore n è $\binom{n}{m}$.

0.9.17. Esercizio Dimostrare che, in ciascuna riga del triangolo aritmetico, la somma dei termini di posto pari è uguale alla somma dei termini di posto dispari.

(*Suggerimento*: si ponga $a = -b = \dots$ nella formula del binomio (0.9.7).)

0.9.18. Esercizio Dimostrare per induzione il Teor. 0.9.5.

Risultati degli esercizi

0.1.2 Sono vere (7) e (9).

0.4.1 $\mathcal{R}_1$ è solamente simmetrica.

0.4.2 $\mathcal{R}_2$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

0.5.1 L'unica funzione di dominio A è F_1 .

0.5.4 La funzione g_1 è suriettiva, ma non iniettiva; la funzione g_2 è iniettiva e suriettiva; la funzione g_3 è iniettiva, ma non suriettiva.

0.5.5 La funzione g_4 è iniettiva e suriettiva; la funzione g_5 è iniettiva, ma non suriettiva; la funzione g_6 non è iniettiva, né suriettiva.

0.5.6 La funzione g_7 è suriettiva, ma non iniettiva.

0.5.7 La funzione g_8 è suriettiva, ma non iniettiva.

0.5.8

$$\begin{aligned} &g_2^{-1}\colon \{1,2\} \to \{1,2\}\,, && g_2^{-1}(1) = 2\,, \quad g_2^{-1}(2) = 1\,; \\ &g_3^{-1}\colon \{2,3,4\} \to \{1,2,3\}\,, && g_3^{-1}(2) = 2\,, \quad g_3^{-1}(3) = 1\,, \quad g_3^{-1}(4) = 3\,. \end{aligned}$$

0.5.9

$$g_4^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad g_4^{-1}(y) = y\,;$$

$$g_5^{-1}\colon \{y \in \mathbb{R} \mid y \le 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\} \to \mathbb{R}\,, \qquad g_5^{-1}(y) = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \le 0\,, \\ y-1\,, & \text{se } y > 1\,. \end{cases}$$

0.5.10

(1) $(g_9 \circ h_9)(x) = 3 - 2x\,,\ (h_9 \circ g_9)(x) = -1 - 2x\,;$

(2) $(g_{10} \circ h_{10})(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} - 1\,,\ (h_{10} \circ g_{10})(x) = \dfrac{1}{x^4 - 2x^2 + 2}\,;$

(3) $(g_{11} \circ h_{11})(x) = x\,,\ (h_{11} \circ g_{11})(x) = x\,.$

0.5.11

(1) $g_{12} = h_{12} \circ k_{12}$ con

$$\begin{aligned} &h_{12}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && h_{12}(x) = x + 1\,, \\ &k_{12}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && k_{12}(x) = x^3\,; \end{aligned}$$

(2) $g_{13} = h_{13} \circ k_{13}$ con

$$\begin{aligned} &h_{13}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,, && h_{13}(x) = \sqrt{x}\,, \\ &k_{13}\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -1\} \to \mathbb{R}\,, && k_{13}(x) = x + 1\,; \end{aligned}$$

(3) $g_{14} = h_{14} \circ k_{14}$ con

$$\begin{aligned} &h_{14}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && h_{14}(x) = x^4\,, \\ &k_{14}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && k_{14}(x) = x + 2\,; \end{aligned}$$

(4) $g_{15} = h_{15} \circ k_{15}$ con

$$h_{15} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad h_{15}(x) = 1 + x + x^2\,,$$
$$k_{15} \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\,, \qquad k_{15}(x) = \frac{1}{x}\,.$$

0.6.3

(1) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le 2/5 \,\}$;
(2) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}/3 \,\}$;
(3) $\mathbb{R}^*_-$;
(4) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 2 \,\}$;
(5) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1 \,\}$.

0.6.4

(1) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 7/4 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 9/4 \,\}$;
(2) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 0 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 4 \,\}$.

0.6.5

(1) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le -3 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge 3 \,\}$;
(2) $\emptyset$;
(3) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid -6 \le x \le 2 \,\}$;
(4) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 2 \,\}$;
(5) $\mathbb{R} \setminus \{\, 1 \,\}$;
(6) $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \right\}$;
(7) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \,\}$;
(8) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2 \,\}$.

0.6.6

(1) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \,\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\dfrac{\sqrt{41}+1}{10} < x < -\dfrac{1}{2} \right\} \cup$
$\cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > \dfrac{\sqrt{41}-1}{10} \right\}$;
(2) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \,\}$.

0.6.7

(1) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > -7/16 \,\}$;
(2) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \,\}$;
(3) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le -1/2 \,\}$.

0.6.8 $\inf A = 0$, $\sup A = 1$; l'estremo superiore è anche minimo di A , mentre A non ha massimo.

0.9.3 24 .

0.9.4 648 nel primo caso, 729 nel secondo.

0.9.5 120 .

0.9.6 $\binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2}$ ambi; $\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6}$ terne; $\binom{90}{4} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{24}$ quaterne; $\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{120}$ cinquine.

0.9.7 24.

0.9.8 360.

0.9.9 9 nel primo caso, 6 nel secondo.

0.9.10 $160\,000$.

0.9.11 $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 1\,680$.

0.9.12 30.

0.9.13 $1\,000\,000$.

0.9.14

(1) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;
(2) $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$;
(3) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;
(4) $16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$;
(5) $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$;
(6) $1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4$.