25 settembre

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Assioma (di Peano) $\mathbb{N}$ soddisfa la seguente proprietà. Se S è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ t.c. valgono

1) $S \ni 0$

2) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$

allora $S = \mathbb{N}$.

Teorema (Principio di Induzione) Sia $p(n)$ una proposizione per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che

1') $p(0)$ è vera

2') $(p(n)$ è vera$) \Rightarrow (p(n+1)$ è vera$)$

Allora risulta che $p(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dim. Definiamo $S = \{n \in \mathbb{N} : p(n)$ è vera$\}$

Dimostrare ~~che~~ tesi equivale a dimostrare $S = \mathbb{N}$.

Dimostreremo $S = \mathbb{N}$ usando l'assioma di Peano

1) Dobbiamo dimostrare che $\boxed{0 \in S}$, cioè che $p(0)$ è vera, il che è vero per l'ipotesi 1').

2) Dobbiamo dimostrare

$$\boxed{n \in S \Rightarrow n+1 \in S}$$

$n \in S \iff p(n)$ è vera

Da 2') ho $p(n)$ è vera $\Rightarrow p(n+1)$ è vera

Concludiamo

$n \in S \Rightarrow p(n+1)$ è vera $\Rightarrow n+1 \in S$

Ma $(p(n+1)$ è vera$) \iff n+1 \in S$

Abbiamo dimostrato

$$\boxed{n \in S \Rightarrow n+1 \in S}$$

Teorema (Disuguaglianza di Bernoulli, p. 47)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \geq -1$, si ha

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx. \qquad P(n)}$$

$(a^0 = 1)$
$(0^0 = 1)$

Dim. Consideriamo la successione di disuguaglianze $P(n)$.
Per dimostrare che sono vere applichiamo il Principio di Induzione

1) Verifichiamo che ($P(0)$ è vera) ✓

$$(1+x)^0 = 1$$

$$1 + 0x = 1$$

2) Vogliamo verificare che ($P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ vera)

Assumiamo $\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$ e dimostriamo

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Prendiamo

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \cdot (1+x)$$

(qui $(1+x) \geq 0$)

Ottengo

$$\underbrace{(1+x)^n (1+x)}_{=(1+x)^{n+1}} \geq (1+nx)\,(1+x)$$

Abbiamo dimostrato

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2$$

$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$

$$\boxed{(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x}$$

$\square$