# COMPLEMENTI DI TRASMISSIONE DEL CALORE

---

Enrico Nobile
DIA - Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Università degli Studi di Trieste
Via A. Valerio 10, 34127 TRIESTE

ver.: 1 Settembre 2022

# Parte I

# CONDUZIONE NON STAZIONARIA

# 1 CASO GENERALE DEI SISTEMI A TEMPERATURA UNIFORME

## 1.1 INTRODUZIONE

Sebbene il processo di conduzione non stazionaria in un solido sia comunemente dovuto allo scambio termico convettivo dal fluido circostante, altri processi di scambio termico ed energetici possono coesistere, come schematizzato in figura 1:

- Scambio termico per irraggiamento fra il solido e l'ambiente (ad esempio se il solido è contenuto in un'ampia cavità, vuota o riempita di gas trasparente all'irraggiamento, le cui pareti hanno temperatura diversa da quella del solido);
- Flusso termico imposto su tutta, o parte, la superficie del solido (dovuto, ad esempio, ad un riscaldatore elettrico a film attaccato sulla superficie);
- Generazione interna di energia (es.: passaggio di corrente elettrica nel solido).

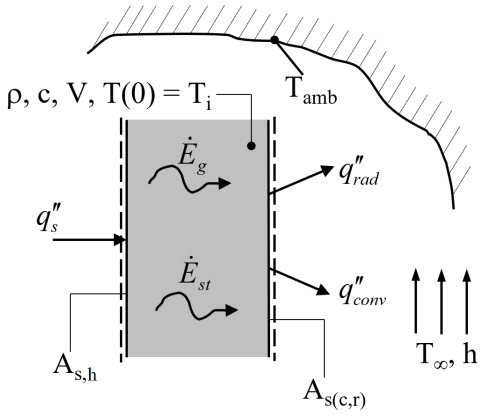



**Figura 1:** Processi energetici per sistemi a temperatura uniforme.

## 1.2 CASO GENERALE

Nel caso più generale le ipotesi di lavoro sono le seguenti:

1. Si assume che inizialmente ($\tau = 0$) la temperatura del solido $T_i$ differisce da quella del fluido, $T_\infty$, e dell'ambiente, $T_{amb}$.
2. Si ipotizza inoltre che ambedue le modalità di scambio energetico, di superficie $q''_s$ e volumetrica $\dot{q}_g$ ($\dot{E}_g/V$), inizino simultaneamente a $\tau = 0$;

3. Il flusso termico imposto e lo scambio termico convettivo-radiativo avvengono su porzioni mutuamente esclusive della superficie, $A_{s,h}$ e $A_{s(c,r)}$;
4. Lo scambio termico convettivo-radiativo avviene dalla superficie del solido;
5. Sebbene la convezione e l'irraggiamento siano stati prescritti sulla stessa superficie, queste, in numerose situazioni, possono differire ($A_{s,c} \neq A_{s,r}$).

Applicando il primo principio (per sistemi chiusi) si ottiene

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = q''_s A_{s,h} + \dot{E}_g - \left(q''_{conv} + q''_{rad}\right) A_{s(c,r)} \tag{1}$$

ed esplicitando le espressioni note per i flussi termici specifici

$$\boxed{\rho V c \frac{dT}{d\tau} = q''_s A_{s,h} + \dot{E}_g - \left[h\left(T - T_\infty\right) + \epsilon\sigma\left(T^4 - T^4_{amb}\right)\right] A_{s(c,r)}} \tag{2}$$

Sfortunatamente l'equazione (2) è un'equazione differenziale non-lineare, non omogenea del primo ordine, che in generale richiede di venire risolta numericamente, utilizzando uno dei numerosi pacchetti, linguaggi e sistemi disponibili, ad esempio MATLAB®, MATHEMATICA®, Python *odeint*, Julia *OrdinaryDiffEq.jl* etc.

Tuttavia soluzioni analitiche esatte si possono ottenere in alcuni casi semplici.

## 1.3 CASI PARTICOLARI

### 1.3.1 Scambio termico solo per irraggiamento

In assenza di flusso termico imposto e di generazione interna, e scambio termico convettivo nullo o trascurabile rispetto allo scambio termico per irraggiamento, l'eq. (2) si semplifica nella

$$\rho V c \frac{dT}{d\tau} = -\epsilon\sigma A_{s,r}\left(T^4 - T^4_{amb}\right) \tag{3}$$

Separando le variabili ed integrando fra la condizione iniziale ed il generico tempo $\tau$ si ottiene

$$\frac{\epsilon\sigma A_{s,r}}{\rho V c}\int_0^\tau d\tau = \int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T^4_{amb} - T^4} \tag{4}$$

Valutando ambedue gli integrali nell'eq.(4) e risolvendo per il tempo $\tau$ necessario per raggiungere la temperatura $T$, si ottiene

$$\tau = \frac{\rho V c}{4\epsilon A_{s,r}\sigma T^4_{amb}}\left\{\ln\left|\frac{T_{amb} + T}{T_{amb} - T}\right| - \ln\left|\frac{T_{amb} + T_i}{T_{amb} - T_i}\right| + 2\left[\tan^{-1}\left(\frac{T}{T_{amb}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{T_i}{T_{amb}}\right)\right]\right\} \tag{5}$$

o, in un'altra forma[1]

$$\tau = \frac{\rho V c}{2\epsilon A_{s,r}\sigma T_{amb}^3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{T}{T_{amb}}\right)+\tanh^{-1}\left(\frac{T}{T_{amb}}\right)\right] - \left[\tan^{-1}\left(\frac{T_i}{T_{amb}}\right)+\tanh^{-1}\left(\frac{T_i}{T_{amb}}\right)\right] \tag{6}$$

Tuttavia, ambedue le espressioni (5) e (6) non si prestano ad essere utilizzate per valutare *esplicitamente* la temperatura $T$ in funzione di $\tau$, $T_i$ e $T_{amb}$. Inoltre esse non conducono direttamente al risultato per il caso particolare $T_{amb} = 0$ (radiazione nello spazio). Questo caso particolare può essere affrontato partendo nuovamente dalla (4) ed ottenendo

$$\tau = \frac{\rho V c}{3\epsilon A_{s,r}\sigma}\left(\frac{1}{T^3}-\frac{1}{T_i^3}\right) \tag{7}$$

### 1.3.2 Assenza di irraggiamento e coefficiente convettivo indipendente dal tempo

Una soluzione esatta dell'equazione (2) può ottenersi nel caso in cui lo scambio termico per irraggiamento sia nullo o comunque trascurabile, e tutte le altre quantità, a parte naturalmente la temperatura, siano indipendenti dal tempo.
Definendo $\theta \equiv T - T_\infty$, con $d\theta/d\tau = dT/d\tau$, l'equazione (2) si semplifica in un'equazione differenziale non omogenea lineare del primo ordine, la cui forma è

$$\frac{d\theta}{d\tau} + a\theta - b = 0 \tag{8}$$

dove

$$a \equiv (hA_{s,c}/\rho V c)$$

e

$$b \equiv \left[\left(q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g\right)/\rho V c\right]$$

Sebbene l'equazione (8) possa venir risolta sommando la soluzione dell'equazione omogenea e la soluzione particolare, un'alternativa è quella di eliminare la non omogeneità attraverso la trasformazione

$$\theta' \equiv \theta - \frac{b}{a} \tag{9}$$

Osservando che $d\theta'/d\tau = d\theta/d\tau$, l'equazione (9) può essere sostituita nella (8) ottenendo

$$\frac{d\theta'}{d\tau} + a\theta' = 0 \tag{10}$$

Separando le variabili ed integrando da 0 a $\tau$ (da $\theta_i'$ a $-\theta'$), si ha

$$\frac{\theta'}{\theta_i'} = \exp(-a\tau) \tag{11}$$

1 Tale espressione è stata ricavata utilizzando il *Symbolic Toolbox* di *MATLAB*

e sostituendo per $\theta'$ e $\theta$

$$\frac{T - T_\infty - (b/a)}{T_i - T_\infty - (b/a)} = \exp(-a\tau) \tag{12}$$

da cui

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-a\tau) + \frac{b/a}{T_i - T_\infty}\left[1 - \exp(-a\tau)\right] \tag{13}$$

È immediato notare che la (13), come dev'essere, per $b = 0$ si semplifica nella più semplice espressione ricavata, sempre nel metodo dei parametri concentrati, nel caso di solo scambio termico convettivo, e fornisce $T = T_i$ per $\tau = 0$.
Inoltre, per $\tau \to \infty$ la (13) si riduce a $(T - T_\infty) = (b/a)$, risultato che può essere facilmente ottenuto attraverso un bilancio di primo principio sulla superficie del corpo di figura 1.

### 1.3.3 Solo convezione con coefficiente convettivo variabile

In alcuni casi, quali ad esempio la convezione naturale o l'ebollizione, il coefficiente convettivo $h$ varia con la differenza di temperatura fra il corpo ed il fluido circostante. In queste situazioni, il coefficiente di scambio termico convettivo può venir approssimato con un'espressione del tipo

$$h = C\,(T - T_\infty)^n \tag{14}$$

dove $n$ è una costante ed il parametro $C$ ha dimensioni $W/(m^2\,K^{1+n}$.
Se l'irraggiamento, il flusso termico imposto e la generazione interna sono nulli o trascurabili, l'equazione (2) si semplifica nella

$$-C\,(T - T_\infty)^n\; A_{s,c}\,(T - T_\infty) = -C\,A_{s,c}\,(T - T_\infty)^{n+1} = \rho\,V\,c\frac{dT}{d\tau} \tag{15}$$

Sostituendo $\theta$ e $d\theta/d\tau$ nella precedente espressione, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \left[\frac{nCA_{s,c}\theta_i^n}{\rho\,V\,c}\tau + 1\right]^{-1/n} \tag{16}$$

L'equazione (16) si riduce all'espressione nota di conduzione non stazionaria nel caso di coefficiente convettivo indipendente dalla temperatura, $n = 0$.

## 1.4 ESEMPI

### 1.4.1 Problema *5.11* da [1]

La piastra di un ferro da stiro ha uno spessore $L = 7$ mm, è realizzata con una lega di alluminio ($\rho = 2800\,kg/m^3$, $c = 900\,J/(kgK)$, $k = 180\,W/(mK)$), ed è caratterizzata da un valore dell'emissività superficiale $\epsilon = 0.80$.

La piastra è riscaldata da una resistenza elettrica disposta sulla sua superficie interna, mentre la superficie esterna è esposta all'aria, con $T_\infty = 20\,°C$,

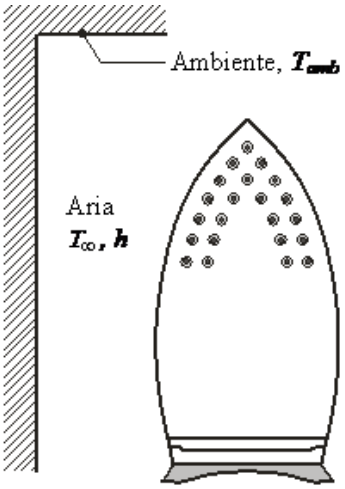



**Figura 2:** Schema del ferro da stiro.

ed alle superfici circostanti, a temperatura $T_{amb} = 18\,°C$.
Se il flusso termico specifico fornito dalla resistenza elettrica è pari a $q'' = 1.25 \times 10^4\, W/m^2$, ed il coefficiente convettivo sulla superficie esterna è pari a $h = 10\, W/(m^2K)$, stimare il tempo necessario per portare la piastra, da una temperatura iniziale $T_i = T_\infty$, alla temperatura di esercizio $T_p = 135\,°C$. La costante di Stefan-Boltzmann vale $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\, W/(m^2K^4)$.

### *Soluzione*

La soluzione del problema viene affrontata secondo tre diverse modalità:

1. Metodo dei parametri concentrati - approccio *analitico*;
2. Metodo dei parametri concentrati - approccio *numerico*;
3. Metodo generale (dipendenza spaziale della temperatura) - approccio *numerico*.

Per tutte le tre modalità, le ipotesi semplificative sono le seguenti:

- Lo scambio termico radiativo avviene fra una superficie piccola, il ferro da stiro, ed una cavità di ampie dimensioni, l'ambiente;
- Il coefficiente convettivo è tempo-invariante;
- Le proprietà termofisiche sono costanti ed uniformi;
- Il ferro da stiro si trova inizialmente in condizioni isoterme alla temperatura $T_i = T_\infty$.

### *Metodo dei parametri concentrati - approccio analitico*

Per poter utilizzare il metodo dei parametri concentrati, per via analitica o numerica, è dapprima necessario valutare se il numero di *Biot*, $Bi$, è inferiore a 0.1. La valutazione del numero di *Biot* può basarsi sul solo scambio termico convettivo, sul (massimo) scambio termico per irraggiamento o, in modo

conservativo, sul contributo di ambedue. Utilizzando quest'ultima tipologia di valutazione, si ha

$$q_{irr} = A_s \, \epsilon \, \sigma \left( T(\tau)^4 - T_{amb}^4 \right)$$

dove $A_s$ è la superficie di un lato della piastra.
Assumendo $T(\tau) = cost = Tp = 135\,^{\circ}C = 408.15K$, corrispondente alla condizione di massimo scambio termico per irraggiamento, la relazione precedente può essere scritta utilizzando il coefficiente di scambio termico per irraggiamento $h_r$

$$q_{irr} = A_s \, h_r \, (T_p - T_{amb})$$

con

$$h_r = \epsilon \, \sigma \, (T_p + T_{amb}) \, \left( T_p^2 + T_{amb}^2 \right)$$

Nel nostro caso, osservando che a rigore essendo $T_p = T_p(\tau)$ anche $h_r$ varierà nel tempo, risulta

$$h_r \approx 8\, W/(m^2 K)$$

Tale valore è dello stesso ordine di grandezza del coefficiente di scambio convettivo, e perciò lo scambio termico per irraggiamento non può essere trascurato.

Possiamo perciò definire il *coefficiente di scambio termico globale* $h_{tot}$, definito in modo tale che sia

$$\begin{aligned} q''_{tot} = q''_{conv} + q''_{irr} &= h \, (T_p - T_\infty) + h_r \, (T_p - T_{amb}) \\ &\approx h_{tot} \, (T_p - T_\infty) \end{aligned}$$

avendo assunto, per semplicità, $T_{amb} \approx T_\infty$, ipotesi accettabile visti i valori molto vicini.

Otteniamo

$$h_{tot} = h + h_r \cong 18\, W/(m^2 K) \tag{17}$$

e quindi valutare il numero di *Biot*, osservando che in questo caso si utilizza, come dimensione caratteristica, L e non L/2, poiché lo scambio termico convettivo ha luogo solo su un lato

$$Bi = \frac{h_{tot} L}{k} = 7 \times 10^{-4}$$

Si tratta di un valore molto basso, che rende perfettamente legittimo l'utilizzo del metodo dei parametri concentrati (LCM - Lumped Capacitance Method).

Considerando quindi l'espressione vista per il caso generale, eq.(2), ed osservando che, in questo caso

$$\begin{gathered} \dot{E}_g = 0 \\ A_{s(c,r)} \equiv A_{s,h} = A_s \\ V = L \, A_s \end{gathered}$$

si ottiene

$$\rho \, L \, A_s \, c \frac{dT}{d\tau} = q''_s A_s - \left[ h \, (T - T_\infty) + \epsilon \sigma \left( T^4 - T_{amb}^4 \right) \right] A_s \tag{18}$$

Utilizzando l'espressione (17) per il coefficiente globale di scambio termico e le semplificazioni viste ($h_{tot} = cost.$ e $T_{amb} \approx T_\infty$), l'equazione (18) si semplifica nella

$$\rho L c \frac{dT}{d\tau} = q_s'' - h_{tot} (T - T_\infty) \tag{19}$$

Definendo

$$\theta = T - T_\infty$$

si ottiene

$$\frac{d\theta}{d\tau} + a\theta - b = 0 \tag{20}$$

con

$$a = \frac{h_{tot}}{\rho L c}$$
$$b = \frac{q_s''}{\rho L c}$$

Un metodo possibile per risolvere l'equazione (20) è quello di definire una variabile ausiliaria

$$\theta' \equiv \theta - \frac{b}{a}$$

da cui, osservando che $d\theta'/d\tau = d\theta/d\tau$, si ottiene

$$\frac{d\theta'}{d\tau} + a\theta' = 0$$

Separando le variabili ed integrando

$$\ln \frac{\theta'}{\theta_i'} = -a\tau$$
$$\ln \frac{T - T_\infty - b/a}{T_i - T_\infty - b/a} = -a\tau$$

da cui

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{b/a}{T - T_\infty} [1 - \exp(-a\tau)] + \exp(-a\tau) \tag{21}$$

1. È agevole verificare che per $q'' = 0$ si ha $b = 0$ e quindi la (21) diventa

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-a\tau) = \exp\left(-\frac{h_{tot} A_s}{\rho V c}\right)$$

cioè il caso, ben noto, di transitorio con solo scambio termico convettivo.

2. Analogamente, per $\tau \to \infty$ si ottiene

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{b/a}{T_i - T_\infty}$$

cioè

$$T = T_\infty + \frac{q''}{h_{tot}}$$

che è lo stesso risultato al quale si perviene attraverso un bilancio sulla superficie in condizioni stazionarie, figura 3

$$q'' = q''_{conv} + q''_{irr} = h_{tot} (T - T_\infty)$$

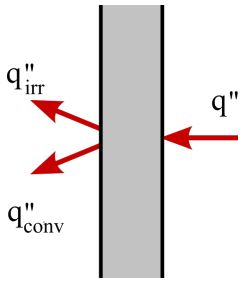



**Figura 3:** Bilancio di energia per la piastra.

Nel nostro caso

$$b = \frac{q''}{\rho L c} = 0.7086 \ \ K/s$$
$$a = \frac{h_{tot}}{\rho L c} = 1.024 \times 10^{-3} \ \ K/s$$

da cui

$$\boxed{\tau = 177.4 \ s}$$

***Metodo dei parametri concentrati - approccio numerico***

L'analisi viene svolta, in MATLAB®, per mezzo della funzione `ode45`[2], utilizzata per la soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie (*ode* - ordinary differential equations).

A differenza dell'approccio analitico appena visto, semplificato assumendo $h_{tot} = cost.$ e $T_{amb} \approx T_\infty$, in questo caso il problema matematico viene affrontato senza semplificazioni. L'equazione utilizzata è pertanto la (18) che, per la risoluzione in MATLAB®, viene scritta in forma esplicita come

$$\boxed{\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\rho L c}\left[q_s'' - h\left(T - T_\infty\right) - \epsilon\sigma\left(T^4 - T_{amb}^4\right)\right]} \tag{22}$$

Il calcolo viene eseguito sfruttando la *gestione di eventi* (*event handler*) disponibile in MATLAB®, considerando quale unico *evento* il raggiungimento della temperatura $T_p$. Lo script MATLAB® è riportato in Appendice A.

L'andamento della della temperatura della piastra, in funzione del tempo, calcolato numericamente è riportato in figura 4

Il risultato fornito dallo script è il seguente:

```
-------------------------------------------------------
08-Nov-2022
-------------------------------------------------------
 Conduzione non stazionaria nella piastra di un ferro da stiro
 (Es. 5.9 di Fundamentals of Heat and Mass Transfer,
 T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, D. P. Dewitt
 7th  Edition, Wiley, 2011)
-------------------------------------------------------
Tempo necessario a raggiungere la temperatura Tp =135[°C]
176.4459[s]
-------------------------------------------------------
```

2 `ode45` risolve equazioni differenziali o sistemi di equazioni differenziali del tipo $dy/d\tau = f(\tau, y)$ da $\tau_0$ a $\tau_f$ con condizione iniziale $y_0$. È probabilmente il solutore di equazioni differenziali più versatile, fra quelli disponibili in MATLAB®, che andrebbe perciò usato in prima battuta. Si rimanda alla documentazione disponibile in MATLAB® per ulteriori informazioni.

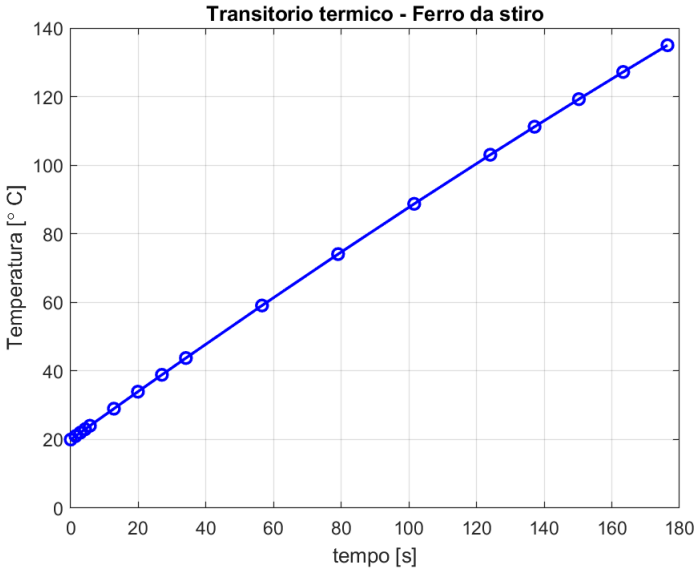



**Figura 4:** Andamento della temperatura della piastra del ferro da stiro in funzione del tempo.

Il risultato differisce di solo lo 0.5% da quello ottenuto, con le semplificazioni viste, per via analitica.

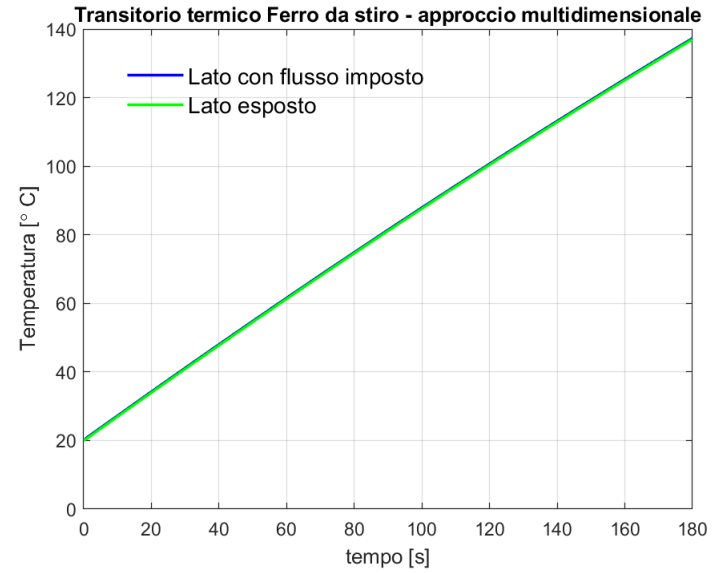
### *Metodo generale (dipendenza spaziale della temperatura) - approccio numerico*

La validità dell'ipotesi di sostanziale indipendenza spaziale delle temperatura, verificata attraverso la verifica del numero di *Biot*, viene qua confermata attraverso un'analisi numerica nella quale si tiene conto della possibile non uniformità della temperatura della piastra durante il riscaldamento. L'analisi viene effettuata tramite il *Partial Differential Equation Toolbox*™di MATLAB®, basato sul metodo degli elementi finiti. Anche in questa analisi, lo scambio termico per irraggiamento viene calcolato in modo corretto, non facendo uso dell'ipotesi semplificativa di coefficiente di scambio termico per irraggiamento costante. Il calcolo è stato effettuato con griglie bidimensionali triangolari, con funzioni di forma Lagrangiane-quadratiche, a risoluzione crescente, sino a garantire una soluzione indipendente dalla griglia adottata.

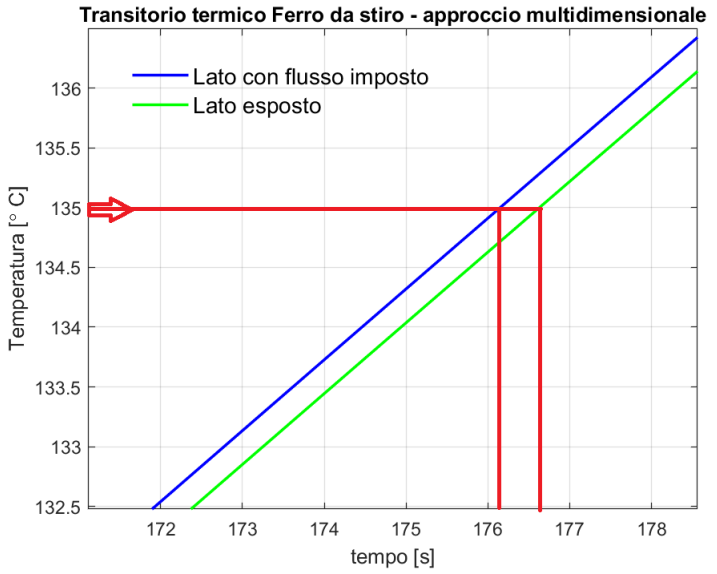
Il grafico in figura 5a riporta l'andamento della temperatura alle due estremità della piastra, mentre la figura 5b riporta il dettaglio nell'intorno della temperatura $T_p = 135\,°C$, dal quale si nota la differenza trascurabile di temperatura fra le estremità: infatti, dalla simulazione risulta che l'estremità con flusso termico imposto raggiunge la temperatura $T_p$ dopo circa 176.2 [s], mentre l'estremità soggetta a scambio termico la raggiunge dopo un tempo di 176.6 [s].

La modesta differenza fra i due valori indica nuovamente la pressochè totale indipendenza spaziale della temperatura.

Infine, a scopo illustrativo, la figura 6 riporta il campo termico di un concio della piastra al raggiungimento della temperatura minima $T_p$, che conferma la sostanziale uniformità della temperatura.




(a)




(b)

**Figura 5:** Andamento della temperatura della piastra del ferro da stiro in funzione del tempo con l'approccio multidimensionale: (a) Andamento complessivo; (b) Andamento nell'intorno di $T_p = 135\,°C$.

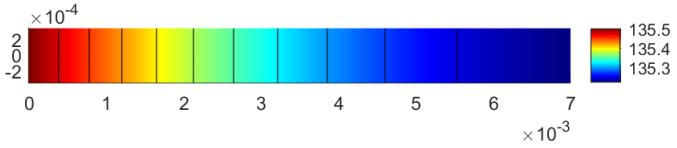



**Figura 6:** Campo termico della piastra del ferro da stiro al raggiungimento della temperatura di esercizio $T_p$.

***Commenti***

- Tutti i tre approcci - analitico a parametri concentrati, numerico a parametri concentrati e numerico multidimensionale - forniscono, com'era logico attendersi visti i valori molto bassi del numero di *Biot*, pressochè lo stesso risultato.
- A rigore, in presenza di scambio termico in convezione naturale come in questo caso, anche il coefficiente di scambio termico convettivo $h$, così come il coefficiente di scambio termico per irraggiamento $h_r$, varia con la differenza di temperatura, come indicato dall'equazione (14).

### 1.4.2 Esempio *5.3* da [1]

In questo problema un pannello di lega di alluminio ($k = 177\,W/(m\,K)$, $c = 875\,J/(kg\,K)$, e $\rho = 2770\,kg/m^3$) di spessore $2L = 3\,mm$ è rivestito su ambedue le facce con uno strato di epoxy (caratterizzato da un valore dell'emissività $\epsilon = 0.8$), che deve essere indurito in forno, ad una temperatura maggiore o uguale di 150°C, per almeno 5 minuti.

La linea di produzione per il trattamento prevede due fasi:

1. Riscaldamento in un forno le cui pareti sono a $T_{amb,f} = 175°C$ ed in cui l'aria ha una temperatura $T_{\infty,f} = 175°C$, e nel quale il coefficiente di scambio termico è stimato pari a $h_f = 40\,W/(m^2K)$;
2. Raffreddamento successivo in un ambiente chiuso di grandi dimensioni, le cui pareti si trovano a $T_{amb,c} = 25°C$ e l'aria è a $T_{\infty,c} = 25°C$, con un coefficiente di scambio termico convettivo $h_c = 10\,W/(m^2K)$.

La fase di riscaldamento del processo è eseguita per un intervallo di tempo $\tau_e$ che, come osservato, eccede il tempo $\tau_c$, necessario per raggiungere la temperatura di 150°C, di 5 minuti ($\tau_e = tc + 300s$). Le due fasi indicate sono schematizzate in figura 7.

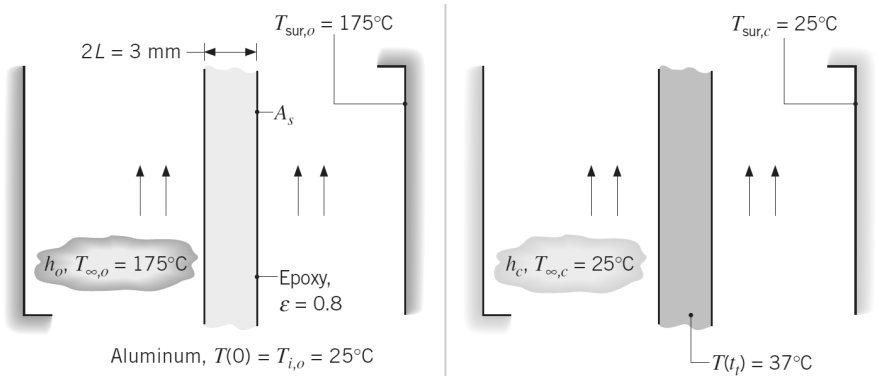



**Figura 7:** Fasi del processo per il pannello di alluminio: (a) Riscaldamento in forno; (b) Raffreddamento in aria.

Se il pannello è introdotto nel forno ad una temperatura iniziale di 25°C, e viene rimosso a fine raffreddamento ad una temperatura, sicura per gli operatori, di 37°C, quanto vale il tempo necessario per l'intero trattamento ?

### *Soluzione*

Per determinare l'applicabilità del metodo dei parametri concentrati, operiamo come già visto al punto 1.4.1, in questo caso valutando i coefficienti globali di scambio termico e quindi i valori del numero di *Biot* per ambedue le fasi di riscaldamento e raffreddamento.

Sulla base dei valori numerici è agevole verificare che, nelle fasi di riscaldamento e raffreddamento, i valori rappresentativi di $h_r$ (coefficiente di scambio termico per irraggiamento) sono i seguenti:

$$h_{r,f} = 15.0\ W/(m^2\,K) \quad \text{con } T_p = 423.15\,K \ \text{ e } \ T_{amb} = 448.15$$
$$h_{r,c} = 8.8\ W/(m^2\,K) \quad \text{con } T_p = 423.15\,K \ \text{ e } \ T_{amb} = 298.15$$

Anche in questo esempio, i valori del coefficiente di scambio termico per irraggiamento sono dello stesso ordine di grandezza dei coefficienti di scambio convettivo, e perciò lo scambio termico per irraggiamento non può essere trascurato.

Pertanto i valori del numero di Biot, basati sul *coefficiente di scambio termico globale*, sono[3]:

$$Bi_f = \frac{(h_f + h_{r,f})\ L}{k} = 4.6 \times 10^{-4}$$
$$Bi_c = \frac{(h_c + h_{r,c})\ L}{k} = 1.6 \times 10^{-4}$$

quindi l'approccio ai parametri concentrati è ampiamente giustificato e corretto.

Nel problema in esame non vi è generazione interna di energia, e non vi sono parti della superficie del pannello sulle quali il flusso termico sia noto ed imposto. Osservando che[4]

$$V = L\,A_s \tag{23}$$
$$A_{s,c} = A_{s,r} = A_s \tag{24}$$

la (2) si semplifica nella

$$\rho\,L\,c\frac{dT}{d\tau} = -\left[h\,(T - T_\infty) + \epsilon\sigma\left(T^4 - T_{amb}^4\right)\right] \tag{25}$$

### *Soluzione*

Anche qua l'analisi viene svolta, in MATLAB®, per mezzo della funzione `ode45`.

In questo caso vanno però considerati due eventi: (1) il raggiungimento della temperatura di riscaldamento e (2) il raffreddamento sino alla temperatura di sicurezza. Fra i due è necessario procedere al calcolo della temperatura del pannello durante il riscaldamento per il tempo necessario alla polimerizzazione dello strato di epoxy.

Il risultato fornito dallo script MATLAB® è il seguente:

3 In questo caso, a differenza del problema precedente, si utilizza come dimensione caratteristica L, semi-spessore del pannello, poichè lo scambio termico ha luogo su ambedue le facce del pannello.

4 Si noti che il volume del pannello è dato da $V = 2L\,A_s/2$, visto che $A_s$ è pari a due volte l'area di una faccia del pannello, da cui l'espressione (23).

```
-------------------------------------------------------
 Conduzione non stazionaria in una lastra di alluminio
 con rivestimento in epoxy da indurire con
 riscaldamento in forno e successivo raffreddamento
-------------------------------------------------------
Tempo totale necessario      =986.273[s]
Di cui:
Tempo per il riscaldamento   =423.0468[s]
Tempo per il raffreddamento  =563.2263[s]
-------------------------------------------------------
```

L'andamento della temperatura del pannello in funzione del tempo nel corso dell'intero processo, calcolato numericamente, è riportato in figura 8

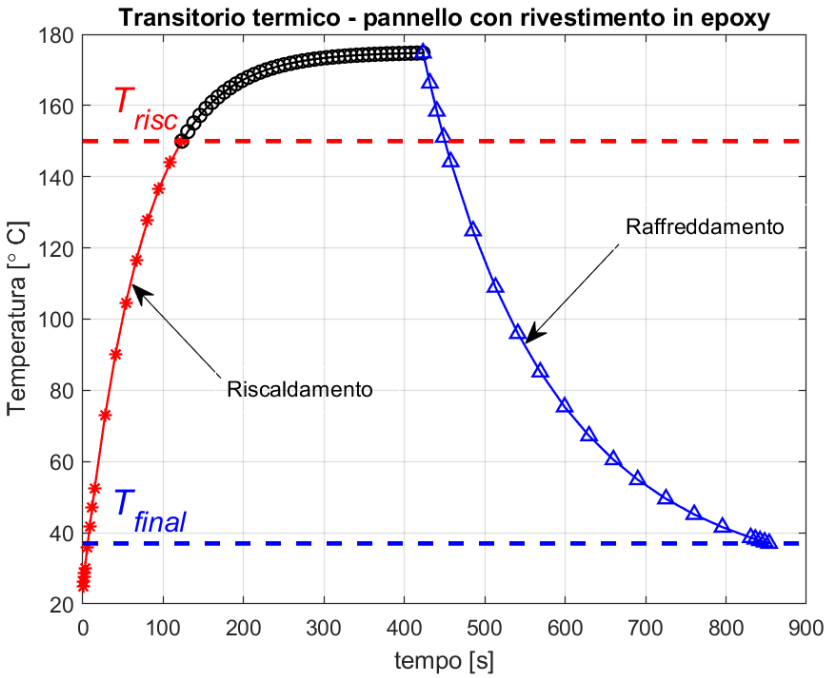



**Figura 8:** Andamento della temperatura del pannello in funzione del tempo.

Parte II

# ANALOGIA ELETTROTERMICA: RESISTENZE IN PARALLELO

## 1.5 RESISTENZE IN SERIE

L'analogia elettrotermica è stata esaminata, descrivendone i vantaggi pratici e concettuali, nell'ambito delle pareti mono- e multi-strato nel caso di pareti piane e cilindriche, come illustrato in figura 9.

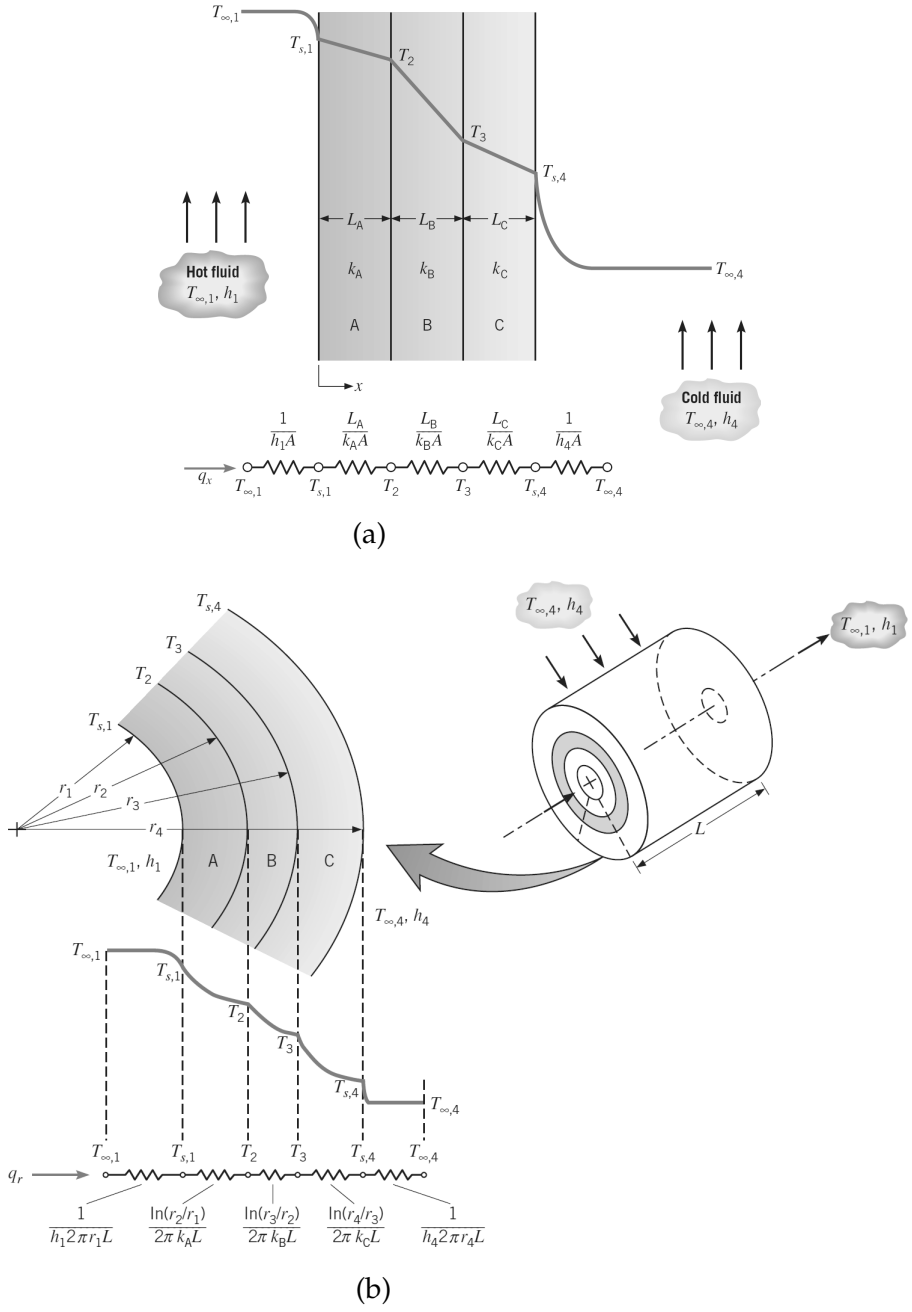



**Figura 9:** Circuito elettrotermico equivalente e andamento della temperatura per pareti multistrato: (a) parete piana; (b) parete cilindrica.

### *Parete piana multistrato*

Nel primo caso - parete piana multistrato, fig. 9a - il flusso termico è dato dalla

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A} + \frac{1}{h_4 A}\right]} = \frac{\Delta T}{R_{tot}} \tag{26}$$

dove $R_{tot}$ [K/W] rappresenta la resistenza termica totale, costituita dalla somma di tutte le resistenze termiche disposte in serie e $\Delta T$ è la differenza globale di temperatura.

$$R_{tot} = \sum R_t = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A} + \frac{1}{h_4 A} \tag{27}$$

La (26) può essere anche espressa in funzione del *coefficiente globale di scambio termico* $U$ [$W/m^2K$] o *trasmittanza*

$$q_x \equiv U A \Delta T \tag{28}$$

con

$$U = \frac{1}{R_{tot\,A}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}\right]} \tag{29}$$

### *Parete cilindrica multistrato*

Nel caso di parete cilindrica multistrato, le espressioni per il flusso termico $q_r$ e la resistenza termica totale $R_{tot}$ diventano

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}\right]} = \frac{\Delta T}{R_{tot}} \tag{30}$$

$$R_{tot} = \left[\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}\right] \tag{31}$$

Anche qua la (30) può essere espressa in funzione del *coefficiente globale di scambio termico* $U$ o *trasmittanza*

$$q_r \equiv U A \Delta T \tag{32}$$

In questo caso, però, dobbiamo porre attenzione al fatto che, a differenza delle pareti piane multistrato, l'area di scambio termico $A$ varia con il raggio: $A = A(r)$, pertanto è necessario indicare l'area alla quale è riferita la trasmittanza stessa.
Se, ad esempio, $U$ è riferita all'area interna $A_1 = 2\pi r_1 L$, si avrà che essa vale

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_B}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_C}\ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4}\frac{1}{h_4}} \tag{33}$$

Naturalmente questa definizione è *arbitraria*, e la *trasmittanza* può essere riferita all'area esterna $A_4$ o, più raramente, a qualsiasi area intermedia. In ogni caso si ha

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = U_4 A_4 = \left(\sum R_t\right)^{-1} = R_{tot}^{-1} \tag{34}$$

e le forme specifiche per $U_2$, $U_3$ e $U_4$ possono ricavarsi dalle (30) e (32).

## 1.6 RESISTENZE IN PARALLELO

È possibile e soprattutto *corretto* estendere l'analogia elettrotermica anche al caso di pareti composite? Ed in caso affermativo, con che grado di accuratezza?

Vediamolo da subito con un semplice esempio: consideriamo la parete composita, assunta per semplicità di profondità unitaria, riportata in figura 10.

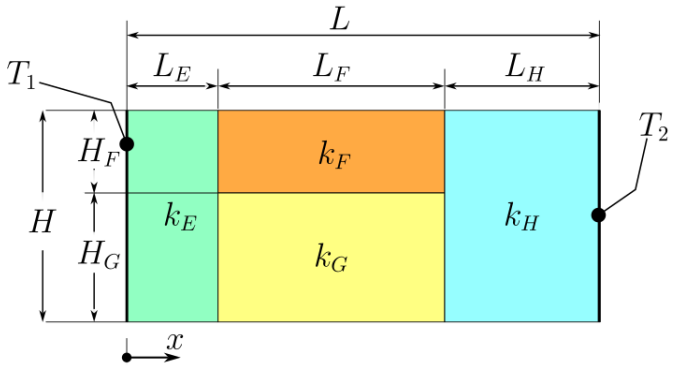



**Figura 10:** Parete composita con materiali in serie-parallelo.

Sebbene il problema sia in tal caso bidimensionale, cioè $T = T(x, y)$ come vedremo nel seguito, è spesso accettabile utilizzare l'analogia elettrotermica, assumendo quindi implicitamente che il campo termico sia monodimensionale, cioè $T \approx T(x)$. Per determinare il valore della resistenza termica totale per *unità di profondità della parete*, $R'_{tot}$ [K/W m], possiamo assumere una delle due diverse ipotesi, schematizzate in figura 11

1. Tutte le superfici *normali* alla direzione x sono *isoterme*.
2. Tutte le superfici *parallele* alla direzione x sono *adiabatiche*.

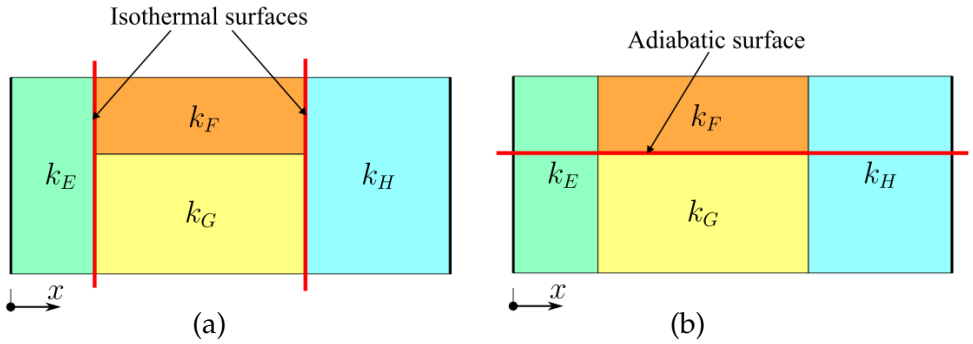



**Figura 11:** Ipotesi di lavoro per la parete composita di figura 10: (a) superfici verticali isoterme; (b) superfici orizzontali adiabatiche.

Le corrispondenti reti elettriche equivalenti sono riportate in figura 12.

Vediamo, in ciascuna delle due ipotesi, quale sia il valore della resistenza termica totale. Per far ciò, assegniamo dei valori alle dimensioni ed alle conducibilità termiche dei materiali costituenti

$$L_E = 0.2\,[m]; \quad L_F = 0.5\,[m]; \quad L_H = 0.3\,[m]; \quad H_F = 0.2\,[m]; \quad H_G = 0.3\,[m]$$

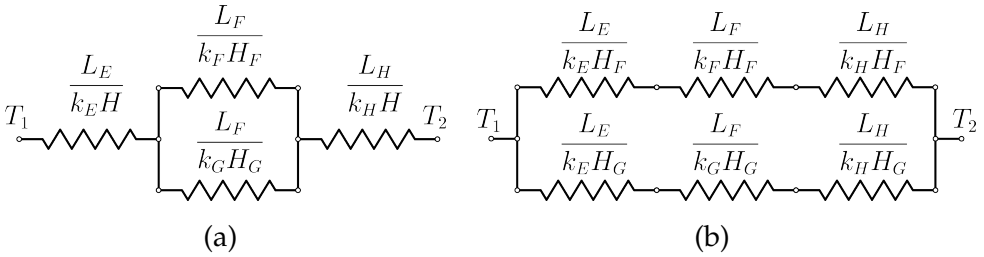



**Figura 12:** Reti elettriche equivalenti per la parete composita di figura 10: (a) superfici verticali isoterme; (b) superfici orizzontali adiabatiche.

$$k_E = 25\,[W/mK]; \quad k_F = 5\,[W/mK]; \quad k_G = 100\,[W/mK]; \quad k_H = 25\,[W/mK]$$

1. *Superfici normali isoterme.*
   In questo caso, sulla base dello schema di figura 11-a, si ha [5]

$$R'_{iso} = \frac{L_E}{k_E H} + \frac{1}{\left(\frac{k_F H_F}{L_F} + \frac{k_G H_G}{L_F}\right)} + \frac{L_H}{k_H H} \tag{35}$$

   Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\boxed{R'_{iso} = 0.0561\ [K/Wm]}$$

2. *Superfici orizzontali adiabatiche.*
   In riferimento allo schema di figura 11-b, si ottiene

$$R'_{ad} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{L_E}{k_E H_F} + \frac{L_F}{k_F H_F} + \frac{L_H}{k_H H_F}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{L_E}{k_E H_G} + \frac{L_F}{k_G H_G} + \frac{L_H}{k_H H_G}\right)}} \tag{36}$$

   Sostituendo i valori numerici, in questo caso si ha

$$\boxed{R'_{ad} = 0.0732\ [K/Wm]}$$

Come si può notare i valori così ottenuti della resistenza termica totale sono piuttosto differenti ed in particolare si può dimostrare che $R'_{iso}$ e $R'_{ad}$ rappresentano, rispettivamente, il *limite inferiore* ed il *limite superiore* della resistenza termica totale.
In altre parole, il valore dell'*effettiva resistenza termica totale* sarà compreso fra questi due valori. A tal proposito, la norma *UNI EN ISO 6946: trasmittanza e resistenza termica di elementi opachi* [2] fornisce un metodo per il calcolo della resistenza termica e della trasmittanza dei componenti e degli elementi opachi per l'edilizia.
In particolare essa prevede che la resistenza termica totale $R_t$, di un componente costituito da strati termicamente *omogenei ed eterogenei*, paralleli alla

5 Si ricorda che la resistenza elettrica totale di $n$ resistenze in parallelo $R_1, R_2, \ldots R_n$ è data dalla relazione

$$R_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}}$$

cioè il reciproco della somma dei reciproci delle singole resistenze.

superficie, venga calcolata in via approssimata come la *media aritmetica* dei limiti superiore ed inferiore della resistenza

$$R_t = \frac{R_{iso} + R_{ad}}{2}$$

Nel nostro caso si avrebbe

$$\boxed{R'_t = 0.0647 \ [K/Wm]} \tag{37}$$

Confrontiamo ora questo valore approssimato con la soluzione *esatta* - o comunque piuttosto precisa - ottenuta attraverso il toolbox di MATLAB *PDE-toolbox*. Tale strumento, basato sul metodo degli Elementi Finiti, consente di effettuare analisi di problemi conduttivi in domini bi- e tri-dimensionali. La figura 13 riporta la mesh di calcolo, mentre la figura 14 illustra il campo termico e l'andamento delle linee del flusso termico, rappresentato tramite vettori.

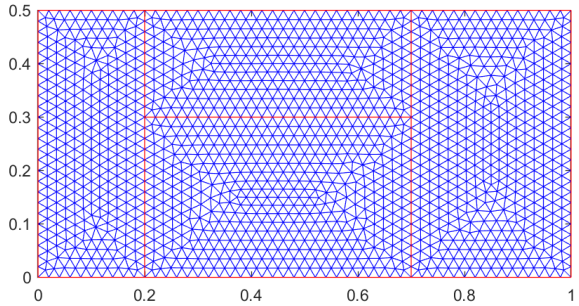



**Figura 13:** Mesh di calcolo utilizzata per l'analisi bi-dimensionale della parete composita.

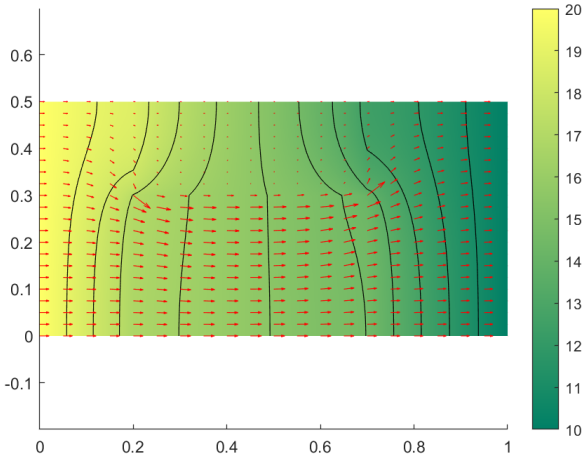



**Figura 14:** Campo di temperatura ed andamento del flusso termico per la parete composita.

Si può notare che l'andamento del flusso termico non rispecchia l'ipotesi di flusso mono-dimensionale (1D) che è alla base dell'analogia elettrotermica. Il valore della resistenza termica ottenuta è ora pari a

$$\boxed{R'_t = 0.0632 \ [K/Wm]}$$

valore molto prossimo a quello approssimato riportato in (37).

# BIBLIOGRAFIA

[1] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, D. P. Dewitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th Ed., Wiley, (2011).

[2] UNI EN ISO 6946:2018, Componenti ed elementi per edilizia - Resistenza termica e trasmittanza termica - Metodi di calcolo. https://store.uni.com/uni-en-iso-6946-2018

# A APPENDICE A

Script MATLAB® per soluzione numerica del transitorio termico del ferro da stiro con il metodo dei parametri concentrati.

```
function iron()
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Questo file simula, attraverso il metodo dei parametri       %
% concentrati, il transitorio termico della piastra in         %
% alluminio di un ferro da stiro, soggetta a riscaldamento     %
% a flusso costante da un lato, e convezione ed                %
% irraggiamento dall'altro.                                    %
% Si desidera valutare il tempo necessario per raggiungere     %
% la temperatura di esercizio tp = 135 °C.                     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Esercizio no. 5.11 di "Fundamentals of Heat and Mass         %
% Transfer", T.L. Bergman, A.S. Lavine, F.P. Incropera,        %
% D.P. Dewitt, 7th  Edition, Wiley, 2011.                      %
%                                                              %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% E. Nobile, 16.04.2007                                        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
tspan       = [0 900]; % Intervallo (arbitrario, dato che non
                       % conosco la durata dell'evento) di
                       % integrazione temporale [s]
% ------------- Condizioni iniziali ------------------------- %
T0          = 20;      % Temperatura iniziale piastra [°C]
% -------------- Temperatura  a regime --------------------- %
Tp          = 135;     % Temperatura piastra a regime [°C]
% ----------------- Materiale piastra ----------------------- %
rho         = 2800;    % Massa volumica (densità) [kg/m^3]
c           = 900;     % Calore specifico [J/kg K]
% ----------------- Spessore piastra -------------------------%
L           = 7e-3;    % Spessore piastra ferro da stiro [m]
% ----------------- Irraggiamento ----------------------------- %
emiss       = 0.8;     % Emissività della piastra
sigma       = 5.67e-8; % Cost. di Stefan-Boltzmann [W/m^2 k^4]
% ---------------------- Convezione ------------------------- %
h           = 10;      % Coefficiente convettivo [W/m^2 K]
% ---------------------- Flusso imposto --------------------- %
q           = 12500;   % Flusso sul lato riscaldato [W/m^2]
% ---------- Condizioni ambientali -------------------------- %
Tinf        = 20;      % Temperatura aria ambiente [°C]
Tamb        = 18;      % Temperatura superfici ambiente [°C]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%  Setta l'evento: raggiungimento della temperatuta Tp
%
options = odeset('Events',@events);
%
%  Integrazione temporale sino a raggiungere la temperatura Tp
%
[t,y,te,ye] = ode45(@lumped_iron,tspan,T0,options,Tp,rho,c,L,emiss,sigma,...
    h,q,Tinf,Tamb);
t_final = te;    % Tempo finale fornito dall'Event handler
%
% Rappresentazione grafica dell'andamento della temperatura in funzione
% del tempo
%
plot(t,y,'bo-','linewidth',1.5);
```

```
grid on;
axis([0 180 0 140]);
title('Transitorio termico - Ferro da stiro');
xlabel('tempo [s]');
ylabel('Temperatura [\circ C]');
hold on
%
%  Stampa/Display...
%
Data=date;
clc;
disp(' ')
disp('------------------------------------------------------ ')
disp(Data)
disp(' ')
disp('------------------------------------------------------ ')
disp(' Conduzione non stazionaria nella piastra di un')
disp(' Ferro da stiro')
disp('(Es. 5.9 di Fundamentals of Heat and Mass Transfer,')
disp('F.P. Incropera, D.P. Dewitt, T.L. Bergman, A.S. Lavine')
disp('6th  Edition, Wiley, 2007)')
disp('------------------------------------------------------ ')
disp(' ')
disp(strcat('Tempo necessario a raggiungere la temperatura Tp =',...
    num2str(Tp),'[°C]'))
disp(strcat(num2str(t_final),'[s]'))
disp(' ')
disp('------------------------------------------------------ ')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dydt = lumped_iron(t,y,Tp,rho,c,L,emiss,sigma,h,q,Tinf,Tamb)

dydt = [(1/(rho*L*c))*...
    (q - h*(y(1)-Tinf)-emiss*sigma*((y(1)+273.15)^4-(Tamb+273.15)^4))];

function [value,isterminal,direction] = events(t,y,Tp,rho,c,L,emiss,...
    sigma,h,q,Tinf,Tamb)
value      = [y(1)-Tp]; % T = Tp: evento
isterminal = 1;         % Termina il calcolo
direction  = +1;        % Solo per attraversamenti positivi,
                        % cioe' T-Tp >0
```