



CAPITOLO 10 ESPONENZIALI

PROVA DI VERIFICA

1 Determina il dominio delle seguenti funzioni.

...../20

a. $f(x) = \sqrt{\frac{2^{x+2} \cdot 3^{x+1} - 18^{-1}}{4^x - 2^{x+1} + 1}}$

b. $g(x) = \sqrt[6]{\frac{5^{2-x} + 5^{1-x} - 4 \cdot 5^{-x} - 26}{2^{2x} - 17 \cdot 2^{x-2} + 1}}$

2 Determina i valori reali di x per cui

...../15

$$\left[\frac{x^2 - 6x + 12}{4} \right]^{3x^2 - 8x - 3} = 1.$$

3 Considera la funzione $f(x) = a + b \cdot 2^{cx}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$.

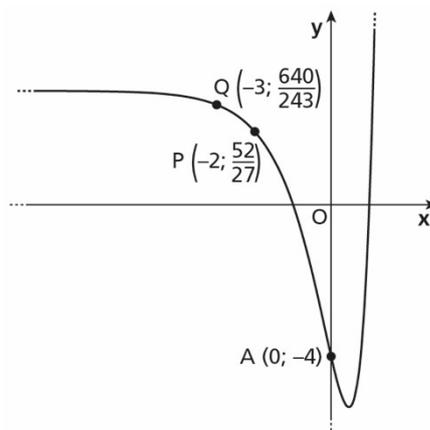
...../40

- a. Determina i valori dei parametri a , b e c tali che il grafico della funzione $f(x)$ passi per i punti $A(-3; -6)$, $B(-1; 0)$ e $C\left(1; \frac{3}{2}\right)$.
- b. Disegna il grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x) = |f(x)|$.
- c. Risolvi la disequazione $g(x) \geq 2$.

4 Considera la funzione $f(x) = a \cdot 9^x + b \cdot 3^x + c$, il cui grafico è rappresentato in figura.

...../25

- a. Determina i valori dei parametri reali a , b e c .
- b. Risolvi la disequazione $\frac{f(x) + 2 \cdot 5^x}{4} \geq \frac{5^x}{2}$.
- c. Determina l'area del triangolo ABC , con B e C i punti di intersezione del grafico della funzione data con l'asse delle ascisse.



Svolgimento

- 1 a.** Determiniamo il dominio di $f(x)$ richiedendo che il radicando sia positivo o nullo. Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$\frac{2^{x+2} \cdot 3^{x+1} - 18^{-1}}{4^x - 2^{x+1} + 1} \geq 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$N \geq 0: 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} - 18^{-1} \geq 0 \rightarrow 4 \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 3 \geq 18^{-1} \rightarrow 12 \cdot 18 \cdot 6^x \geq 1 \rightarrow$$

$$216 \cdot 6^x \geq 6^0 \rightarrow 6^{x+3} \geq 6^0 \rightarrow x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3;$$

$$D > 0: 4^x - 2^{x+1} + 1 > 0 \rightarrow 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 > 0 \rightarrow (2^x - 1)^2 > 0 \rightarrow$$

$$2^x \neq 1 \rightarrow x \neq 0.$$

Il radicando è definito per $x \geq -3 \wedge x \neq 0$, quindi il dominio della funzione è

$$D: [-3; 0[\cup]0; +\infty[.$$

- b.** Determiniamo il dominio di $g(x)$ richiedendo che il radicando sia positivo. Dobbiamo risolvere la disequazione:

$$\frac{5^{2-x} + 5^{1-x} - 4 \cdot 5^{-x} - 26}{2^{2x} - 17 \cdot 2^{x-2} + 1} \geq 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$N \geq 0: 5^{2-x} + 5^{1-x} - 4 \cdot 5^{-x} - 26 \geq 0 \rightarrow \frac{5^2}{5^x} + \frac{5}{5^x} - \frac{4}{5^x} \geq 26 \rightarrow \frac{26}{5^x} \geq 26 \rightarrow$$

$$5^{-x} \geq 1 \rightarrow -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0;$$

$$D > 0: 2^{2x} - 17 \cdot 2^{x-2} + 1 > 0 \rightarrow 2^{2x} - \frac{17}{4} \cdot 2^x + 1 > 0.$$

Per studiare il segno del denominatore usiamo un'incognita ausiliaria: $t = 2^x$. Riscriviamo la disequazione nella forma:

$$4t^2 - 17t + 4 > 0.$$

Calcoliamo le radici del polinomio in t :

$$\Delta = 289 - 64 = 225 \rightarrow t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{8} \rightarrow t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{4}.$$

La disequazione è soddisfatta per:

$$t < \frac{1}{4} \vee t > 4 \rightarrow 2^x < \frac{1}{4} \vee 2^x > 4 \rightarrow x < -2 \vee x > 2.$$

Studiamo il segno del radicando compilando il quadro dei segni.

		-2		0		2	
N	+		+	0		-	
D	+	0		-		0	+
$\frac{N}{D}$	+	+		-		+	-

Il dominio della funzione è

$$D:] - \infty; -2[\cup [0; 2[.$$

2 Osserviamo che la base della potenza è sempre positiva in \mathbb{R} . Infatti, il trinomio ha il coefficiente di x^2 positivo e il discriminante ridotto è $\frac{\Delta}{4} = 9 - 12 < 0$.

L'uguaglianza è vera in due casi distinti.

Nel primo caso, la base della potenza è uguale a 1. Risolviamo, quindi, l'equazione:

$$\frac{x^2 - 6x + 12}{4} = 1 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 8 = 1 \rightarrow x_{1,2} = 3 \pm 1 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2.$$

Il secondo caso in cui l'equazione di partenza è soddisfatta è quando l'esponente vale 0:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0,$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16 + 9 = 25 \rightarrow x_{3,4} = \frac{4 \pm 5}{3} \rightarrow x_3 = 3, x_4 = -\frac{1}{3}.$$

L'equazione ha quattro soluzioni reali: $-\frac{1}{3}, 2, 3, 4$.

3 a. Imponiamo le condizioni di passaggio:

- passaggio per $A(-3; -6)$: deve valere $f(-3) = -6 \rightarrow -6 = a + b \cdot 2^{-3c}$;
- passaggio per $B(-1; 0)$: deve valere $f(-1) = 0 \rightarrow 0 = a + b \cdot 2^{-c}$;
- passaggio per $C(1; \frac{3}{2})$: deve valere $f(1) = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = a + b \cdot 2^c$.

Sappiamo che $c \neq 0$, ma deve essere anche $b \neq 0$, altrimenti $f(x)$ sarebbe una funzione costante e non potrebbe quindi passare per i punti A, B e C . Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a + b \cdot 2^{-3c} = -6 \\ a + b \cdot 2^{-c} = 0 \\ a + b \cdot 2^c = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b(2^{-3c} - 2^{-c}) = -6 \\ b(2^c - 2^{-c}) = \frac{3}{2} \\ a = -b \cdot 2^{-c} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b \cdot 2^{-3c}(1 - 2^{2c}) = -6 \\ b \cdot 2^{-c}(2^{2c} - 1) = \frac{3}{2} \\ a = -b \cdot 2^{-c} \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima e la seconda equazione dalla terza abbiamo ottenuto il sistema ridotto. Mettiamo a rapporto le prime due equazioni, ricordando che $b \neq 0$ e che $c \neq 0 \rightarrow 2^{2c} - 1 \neq 0$:

$$\frac{b \cdot 2^{-3c}(1 - 2^{2c})}{b \cdot 2^{-c}(2^{2c} - 1)} = -6 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow 2^{-2c} = 4 \rightarrow -2c = 2 \rightarrow c = -1.$$

Ricaviamo b dalla seconda equazione del sistema ridotto:

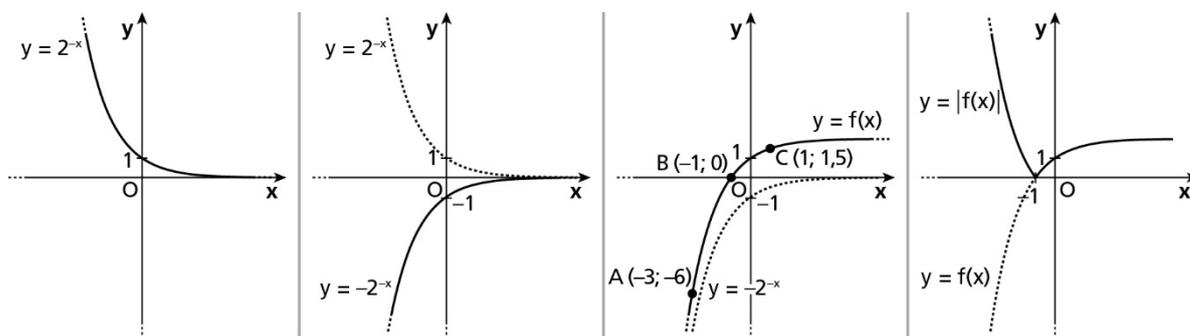
$$b \cdot 2^1(2^{-2} - 1) = \frac{3}{2} \rightarrow 2b \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \rightarrow b = -1.$$

Per trovare a torniamo al sistema iniziale:

$$\begin{cases} c = -1 \\ a = -b \cdot 2^{-c} \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Pertanto, $f(x) = 2 - 2^{-x}$.

- b. Costruiamo il grafico di $f(x)$ a partire dal grafico di $y = 2^{-x}$ e quello di $g(x)$ a partire da quello di $f(x)$.



- c. Risolviamo la disequazione:

$$g(x) \geq 2 \rightarrow |2 - 2^{-x}| \geq 2 \rightarrow 2 - 2^{-x} \leq -2 \vee 2 - 2^{-x} \geq 2 \rightarrow 4 \leq 2^{-x} \vee 2^{-x} \leq 0 \rightarrow 2^{-x} \geq 2^2 \rightarrow x \leq -2.$$

4

- a. Imponiamo il passaggio della curva per i punti dati.

$$Q\left(-3; \frac{640}{243}\right): f(-3) = \frac{640}{243} \rightarrow a \cdot 9^{-3} + b \cdot 3^{-3} + c = \frac{640}{3^5} \rightarrow \frac{a}{3^6} + \frac{b}{3^3} + c = \frac{640}{3^5} \rightarrow a + 27b + 729c = 1920;$$

$$P\left(-2; \frac{52}{27}\right): f(-2) = \frac{52}{27} \rightarrow a \cdot 9^{-2} + b \cdot 3^{-2} + c = \frac{52}{3^3} \rightarrow \frac{a}{3^4} + \frac{b}{3^2} + c = \frac{52}{3^3} \rightarrow a + 9b + 81c = 156;$$

$$A(0; -4): f(0) = -4 \rightarrow a \cdot 9^0 + b \cdot 3^0 + c = -4 \rightarrow a + b + c = -4.$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a + 27b + 729c = 1920 \\ a + 9b + 81c = 156 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 26b + 728c = 1924 \\ 8b + 80c = 160 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + 28c = 74 \\ b + 10c = 20 \\ a + b + c = -4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 18c = 64 \\ b = 20 - 10c \\ a = -4 - b - c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -10 \\ a = 3 \end{cases}.$$

La funzione è:

$$f(x) = 3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3.$$

b. Risolviamo la disequazione.

$$\frac{f(x) + 2 \cdot 5^x}{4} \geq \frac{5^x}{2} \rightarrow f(x) + 2 \cdot 5^x \geq 2 \cdot 5^x \rightarrow f(x) \geq 0 \rightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 \geq 0$$

Usiamo una variabile ausiliaria, poniamo $t = 3^x$ e otteniamo la disequazione algebrica:

$$3t^2 - 10t + 3 \geq 0.$$

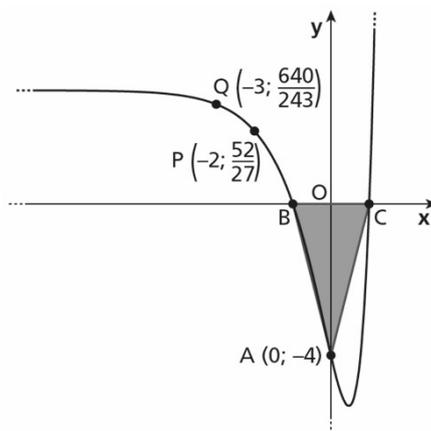
Risolviamo l'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 9 = 16 \rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 4}{3} \rightarrow t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{3}.$$

Quindi

$$t \leq 3^{-1} \vee t \geq 3 \rightarrow 3^x \leq 3^{-1} \vee 3^x \geq 3 \rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1.$$

c. La disequazione del punto precedente ci ha permesso di studiare il segno di $f(x)$. Quindi, gli zeri di $f(x)$ sono ± 1 . Pertanto, $B(-1; 0)$ e $C(1; 0)$.



Il triangolo ha base $\overline{BC} = 2$ e altezza $\overline{AO} = 4$. Quindi, l'area è

$$Area = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$