CAPITOLO 10
ESPONENZIALI

PROVA DI VERIFICA – ESERCIZI REALTÀ E MODELLI

1 **Il caricabatterie** Un cellulare si è spento perché la batteria è completamente scarica. Il suo caricabatterie ha un processo di carica che può essere approssimato dalla legge:

$$Q(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right).$$

$Q(t)$ esprime la percentuale di carica presente nella batteria all'istante *t*, dove *t* è misurato in minuti.

a. Trova la percentuale di carica mancante dopo 20 minuti dal collegamento alla presa elettrica.

b. Determina la percentuale di carica presente dopo un'ora.

c. Verifica che la funzione data è crescente.

d. Dopo quanto tempo la carica mancante è inferiore all'1%?

e. Rappresenta graficamente la relazione data.

Svolgimento

a. La percentuale di carica mancante dopo 20 minuti è:

$$100 - Q(20) = 100 - 100\left(1 - e^{-\frac{20}{20}}\right) = 100e^{-1} \simeq 36{,}79\% .$$

b. La percentuale di carica presente dopo un'ora è:

$$Q(60) = 100\left(1 - e^{-\frac{60}{20}}\right) = 100(1 - e^{-3}) \simeq 95{,}02\% .$$

c. Per dimostrare che la funzione data è crescente, ricordiamo la definizione.

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è crescente (in senso stretto) in un intervallo *I*, sottoinsieme di *D*, se scelti comunque x_1 e x_2, appartenenti a *I*, tali che $x_1 < x_2$, risulta:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Nel nostro caso consideriamo $t_1 < t_2$ e verifichiamo se $Q(t_1) < Q(t_2)$, cioè se:

$$100\left(1 - e^{-\frac{t_1}{20}}\right) < 100\left(1 - e^{-\frac{t_2}{20}}\right).$$

Applichiamo le proprietà delle disuguaglianze e la proprietà della funzione esponenziale e^t di essere strettamente crescente. Otteniamo:

$$t_1 < t_2 \rightarrow \frac{t_1}{20} < \frac{t_2}{20} \rightarrow -\frac{t_1}{20} > -\frac{t_2}{20} \rightarrow e^{-\frac{t_1}{20}} > e^{-\frac{t_2}{20}} \rightarrow -e^{-\frac{t_1}{20}} < -e^{-\frac{t_2}{20}} \rightarrow$$

$$1 - e^{-\frac{t_1}{20}} < 1 - e^{-\frac{t_2}{20}} \rightarrow 100\left(1 - e^{-\frac{t_1}{20}}\right) < 100\left(1 - e^{-\frac{t_2}{20}}\right) \rightarrow Q(t_1) < Q(t_2).$$

In alternativa, avremmo potuto osservare che la funzione $e^{-\frac{t}{20}}$ è una funzione esponenziale strettamente decrescente, quindi la funzione $e^{-\frac{t}{20}}$ è strettamente crescente.

Possiamo concludere che la funzione $Q(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{20}}\right)$ è crescente perché somma di una funzione costante e di una funzione strettamente crescente.

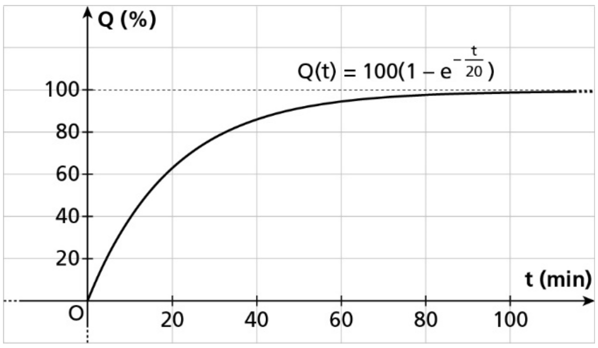
d. La carica mancante è inferiore all'1% quando la carica accumulata è superiore al 99%. Il tempo necessario per caricare la batteria al 99% è superiore a un'ora, visto che la funzione $Q(t)$ è crescente e $Q(60) \simeq 95{,}02$.

Calcoliamo:

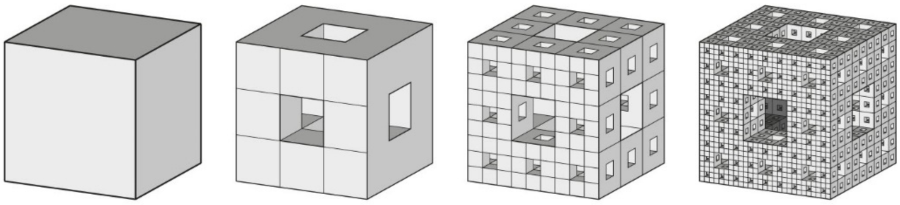
- $Q(90) = 100\left(1 - e^{-\frac{90}{20}}\right) = 100\left(1 - e^{-\frac{9}{2}}\right) \simeq 98{,}89\%$;
- $Q(95) = 100\left(1 - e^{-\frac{95}{20}}\right) = 100\left(1 - e^{-\frac{19}{4}}\right) \simeq 99{,}13\%$.

Servono, quindi, circa 95 minuti di carica.

e. Il grafico della funzione è deducibile a partire da quello della funzione esponenziale $y = e^x$ applicando le opportune trasformazioni geometriche.



2 **La spugna di Menger** La spugna di Menger è un frattale tridimensionale, ossia un oggetto geometrico in cui uno stesso motivo si ripete, all'infinito, su scala sempre più ridotta.
Per costruirlo si parte da un cubo di spigolo $l = 3$ cm e lo si divide in 27 cubi identici. Dopo aver rimosso il cubo centrale e i sei cubi centrali di ogni faccia, si ripete la costruzione precedente su ogni cubo rimasto.



Riporta in una tabella il numero di cubi rimasti a ogni passo della costruzione e il volume totale della spugna nei primi cinque passi della costruzione. Determina il *tasso di variazione*, cioè il rapporto $\frac{V_n}{V_{n-1}}$ tra il volume al passo *n* e quello al passo precedente.
Dopo aver scritto la legge che esprime il volume V_n in funzione del numero di passi effettuati, trova:

a. il volume della spugna dopo 7 iterazioni;

b. il numero di iterazioni necessario affinché il volume della spugna sia $\frac{1024 \cdot 10^{10}}{3^{27}}\text{cm}^3 \simeq 1{,}3\text{cm}^3$.

Svolgimento

Costruiamo la tabella richiesta completandola passo dopo passo.
All'inizio abbiamo la seguente tabella.

passo	numero cubi rimasti	lato di ciascun cubo (cm)	volume di ciascun cubo (cm^3)	volume totale (cm^3)
0	1	3	27	27

Se il lato del cubo di partenza misura 3 cm, ciascuno dei 27 cubetti in cui viene diviso ha il lato che misura 1 cm e il volume pari a 1 cm^3. Togliamo i 7 cubetti e completiamo il primo passo.

passo	numero cubi rimasti	lato di ciascun cubo (cm)	volume di ciascun cubo (cm^3)	volume totale (cm^3)
0	1	3	27	27
1	20	1	1	20

Ripetiamo il procedimento suddividendo ciascuno dei 20 cubi rimasti in 27 cubetti di lato $\frac{1}{3}$ cm e volume $\frac{1}{27}$ cm^3, togliamo $20 \cdot 7$ cubetti e completiamo il secondo passo.

passo	numero cubi rimasti	lato di ciascun cubo (cm)	volume di ciascun cubo (cm^3)	volume totale (cm^3)
0	1	3	27	27
1	20	1	1	20
2	$20 \cdot 20 = 20^2$	1/3	1/27	$20^2 \cdot 1/27$

Completiamo la tabella fino alla sesta iterazione.

passo	numero cubi rimasti	lato di ciascun cubo (cm)	volume di ciascun cubo (cm^3)	volume totale (cm^3)
0	1	3	27	27
1	20	1	1	20
2	$20 \cdot 20 = 20^2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$	$20^2 \cdot \frac{1}{27}$
3	$20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^3$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{729}$	$20^3 \cdot \frac{1}{729} = 20^3 \cdot \frac{1}{27^2} = 27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^3$
4	$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^4$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{19\,683}$	$20^4 \cdot \frac{1}{19\,683} = 20^4 \cdot \frac{1}{27^3} = 27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^4$
5	$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^5$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{531\,441}$	$20^5 \cdot \frac{1}{531\,441} = 20^5 \cdot \frac{1}{27^4} = 27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^5$

Dalla tabella possiamo ricavare la legge che esprime il volume V_n al passo n:

$$V_n = 27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

Quindi

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^n}{27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1}} = \frac{20}{27}.$$

a. Il volume della spugna dopo sette iterazioni vale $V_7 = 27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^7 = \frac{20^7}{27^6} \simeq 3{,}3\ \text{cm}^3$.

b. Per calcolare n dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale:

$$27 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^n = \frac{1024 \cdot 10^{10}}{3^{27}}.$$

Scriviamo l'equazione sotto forma di potenze:

$$3^3 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^n = \frac{2^{10} \cdot 10^{10}}{3^{27}}.$$

Applichiamo le proprietà delle potenze e dividiamo per 3^3:

$$\left(\frac{20}{27}\right)^n = \frac{20^{10}}{3^3 \cdot 3^{27}} \to \left(\frac{20}{27}\right)^n = \frac{20^{10}}{3^{30}}.$$

Riscriviamo l'equazione in modo da ottenere un'uguaglianza fra potenze con la stessa base:

$$\left(\frac{20}{27}\right)^n = \frac{20^{10}}{(3^3)^{10}} \to \left(\frac{20}{27}\right)^n = \left(\frac{20}{27}\right)^{10} \to n = 10.$$