Solving Integrals and Equations with Excel

LECTURE 18 – 12TH DECEMBER 2023

Technology in Mathematics Education

Numerical method for integration

- **The trapezoidal rule**
- **Simpson's rule**

The trapezoidal rule

The problem is to find a numerical approximation for the integral

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

The trapezoidal rule works by approximating the function $f(x)$ by a piecewise linear function and evaluate the integral of each piece. If the interval $[a, b]$ is divided up into n equal subinterval, each of width $h = \frac{b-a}{n}$, then the approximate integral is

$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + f(x_i), \text{ where, } x_i = a + ih, \quad \text{and } i = 0, 1, \cdots, n$$

Example:

$$\int_0^1 (14x^6 + 7)dx.$$

The endpoints (initial and terminal) of the interval, and the number of divisions are entered in the cells A2, B2, C2, respectively. The value of h is calculated in the cell D2 by entering the formula = (B2-A2)/C2.

fx =(B2-A2)/C2

A	B	C	D
a	b	n	h
0	1	50	0,02

Generate $x_i = a + ih$, and $i = 0, 1, \cdots, n$

The next values are generated with the formula = IF(E2>=$B$2; $B$2; E2+$D$2) in E3. This formula adds h to the previous value until we reach the value of b. Afterwards it keeps entering the value of b. This mechanism is used to enable changing the value of n to get more control on the accuracy of the solution

`=IF(E2>=$B$2;$B$2;E2+$D$2)`

A	B	C	D	E	F
	b	n	h	x_i	f(x_i)
0	1	50	0,02	0	
				0,02	
				0,04	
				0,06	

Copy this formula to the next 100 cells or so below E4. The figure shows a part of the sheet further down, where you can see the value of b being repeated.

Generate $f(x_i) = (14x^6 + 7)$

The function $f(x_i)$ is entered in the column labeled F by entering the formula =14*E2^6+7 in the cell F2 and copying it along the corresponding cells for the all entries.

fx =14*E2^6+7

B	C	D	E	F
b	n	h	x_i	f(x_i)
1	50	0,02	0	7
			0,02	7
			0,04	7,0000001
			0,06	7,0000007

Generate

$$I \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + f(x_i),$$

Then, generate each term of the trapezoidal rule, calling it A_i in the spreadsheet. We then form the elements of the summation in the trapezoidal rule by entering the formula = (E3-E2)/2*(F2+F3) in cell G3 and copying it along the corresponding cells for the x_i terms.

fx =(E3-E2)/2*(F2+F3)

Insert Function

B	C	D	E	F	G
b	n	h	x_i	f(x_i)	A_i
1	50	0,02	0	7	
			0,02	7	0,14
			0,04	7,0000001	0,14
			0,06	7,0000007	0,14

Note:

Observe that, instead of using the value of h generated in cell D2, we used the equivalent difference E3-E2. This has two advantages:

1. The formula produces zeros when we go past the right endpoint b. In this way, the final sum of these numbers is not affected by the repetition of b.
2. It allows the use of the trapezoidal rule with non-uniform divisions of the interval $[a, b]$.

Calculating the Integral

The last step is to add the terms in column G to get the approximation of the integral. Select the range of cells that contains the summation terms and then click the sum button (Σ) on the toolbar.

fx =SUM(G3:G102)

B	C	D	E	F	G	H
	n	h	x_i	f(x_i)	A_i	I
1	50	0,02	0	7		9,0027996
			0,02	7	0,14	
			0,04	7,0000001	0,14	

More...

(a) If you now change the number of divisions n to 100, the new, more accurate approximation will appear in the same cell (G103).

(b) To change the interval of integration all you need to do is to change the values a, b in cells A2, B2.

(c) To change the integrated function enter the new formula in cell F2 and copy it to cell F103.

	B	C	D	E	F	G	H
	b	n	h	x_i	f(x_i)	A_i	I
0	1	100	0,01	0	7		9,0007
				0,01	7	0,07	
				0,02	7	0,07	

Simpson's rule

Simpson's rule finds an approximation of the value of the integral I by approximating the integrand with a piecewise polynomial of degree 2 and then evaluate the integral over each piece.

Simpson's formula is:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$ with *n=2*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}h\sum_{i=1}^{n/2}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right]$$ with *n* an even number

Simpson's rule

Simpson's rule finds an approximation of the value of the integral I by approximating the integrand with a piecewise polynomial of degree 2 and then evaluate the integral over each piece.

Simpson's formula is:

$$I \approx \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

with n an even number

Where the interval $[a, b]$ is divided into n intervals, each of length $h = \frac{b-a}{n}$

Implementation

The Excel implementation of Simpson's rule is very much similar to that of the trapezoidal rule, except for some details. The following figure shows the upper part of the worksheet implementation.

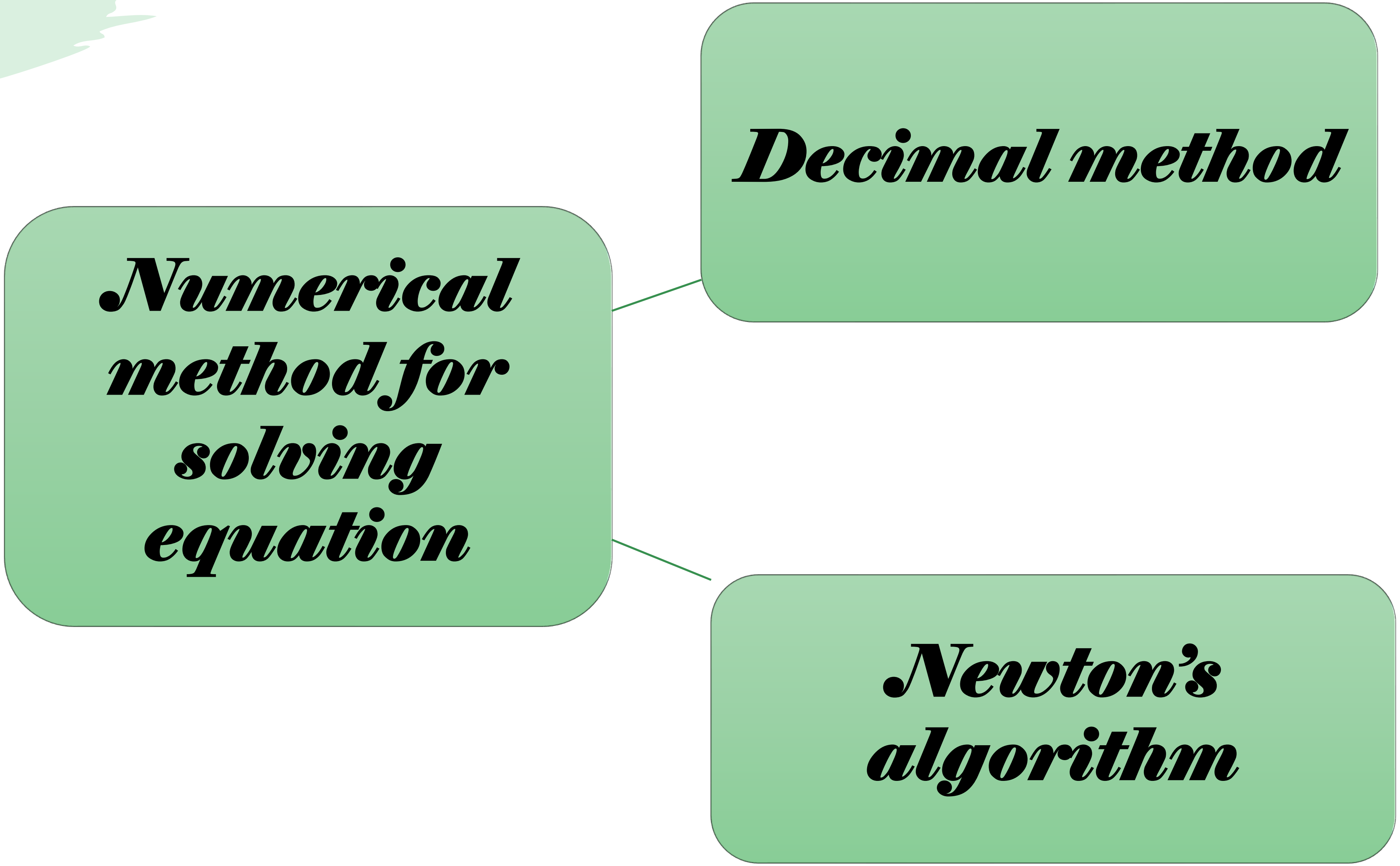
fx =(E4-E2)/6*(F2+4*F3+F4)

B	C	D	E	F	G	H
b	n	h	x_i	f(x_i)	S_i	I
1	40	0,03	0	7		9,0000036
			0,03	7	0,35	
			0,05	7,0000002		
			0,08	7,0000025	0,3500002	

Since Simpson's formula spans two subintervals for each entry in the summation, the copying of the formula is done as follows. Select the range of two cells G2, G3 (note that G2 is actually empty). Using the formula copying technique, drag the two cells down to cell G103. The result is that the formula is copied to every other cell. One more thing to notice here is that, in the above formula, the value of *h* is replaced by the difference over 3 cells divided by 2.

	x_i	f(x_i)	S_i
3	0	7	
	0,03	7	0,35

This way the same skipping is achieved and no problem arises as a result of repeating the values of *b*. When you select the range G2:G103 and click the sum button, you will see the result 9.000003644, which is more accurate than the result of the trapezoidal rule as the theory predicts.


Numerical method for solving equation
Decimal method
Newton's algorithm

DECIMAL METHOD

$x^3 + x = 100.$

La soluzione che cerchiamo, chiamiamola c, è certamente compresa tra 4 e 5: infatti, posto $f(x) = x^3 + x$, risulta

$f(4) = 64+4 = 68$
$f(5) = 125+5 = 130$

e poiché f è continua, $c \in (4, 5)$; il primo passo consiste nel determinare la prima cifra decimale di c: calcoleremo $f(x)$ da 4 a 5 con passo $\Delta x = 0.1$.

In Excel impostiamo nella cella A2 il valore Δx, cioè inizialmente 0.1. Nella cella B2 scriviamo l'estremo sinistro dell'intervallo a cui appartiene c; in B3 scriviamo la formula

=B2+$A$2

e copiamo B2 verso il basso fino a B12, costruendo così la sequenza 4, 4.1, 4.2, …, 5.
In C2 scriviamo la formula

=B2^3+B2

e la copiamo verso il basso fino a C12, calcolando così i valori $f(4)$, $f(4.1)$, …, $f(5)$.

	A	B	C
1	**dx**	**x**	**f(x)**
2	0,1	4	68
3		4,1	73,021
4		4,2	78,288
5		4,3	83,807
6		4,4	89,584
7		4,5	95,625
8		4,6	101,936
9		4,7	108,523
10		4,8	115,392
11		4,9	122,549
12		5	130

Si osserva che $f(4.5) < 100$ mentre $f(4.6) > 100$. Quindi $c \in (4.5, 4.6)$ e la prima cifra decimale è dunque 5. Proseguiamo ora nello stesso modo per la seconda cifra decimale: cambiamo il passo in A2 scrivendo 0.01, e in B2 scriviamo 4.5. Il foglio si aggiorna nel seguente modo.

	A	B	C
1	**dx**	**x**	**f(x)**
2	0,01	4,5	95,625
3		4,51	96,24385
4		4,52	96,86541
5		4,53	97,48968
6		4,54	98,11666
7		4,55	98,74637
8		4,56	99,37882
9		4,57	100,014
10		4,58	100,6519
11		4,59	101,2926
12		4,6	101,936

Con lo stesso ragionamento di prima scopriamo che *c* è compreso tra 4.56 e 4.57. In A2 scriviamo 0.001 e in B2 4.56, e proseguiamo così fino alla precisione desiderata, cambiando ad ogni iterazione i valori di A2 e B2.

	A	B	C
1	**dx**	**x**	**f(x)**
2	0,001	4,56	99,37882
3		4,561	99,44221
4		4,562	99,50563
5		4,563	99,56908
6		4,564	99,63256
7		4,565	99,69606
8		4,566	99,75959
9		4,567	99,82315
10		4,568	99,88674
11		4,569	99,95035
12		4,57	100,014

	A	B	C
1	**dx**	**x**	**f(x)**
2	0,0001	4,569	99,95035
3		4,5691	99,95671
4		4,5692	99,96308
5		4,5693	99,96944
6		4,5694	99,97581
7		4,5695	99,98217
8		4,5696	99,98853
9		4,5697	99,9949
10		4,5698	100,0013
11		4,5699	100,0076
12		4,57	100,014

	A	B	C
1	**dx**	**x**	**f(x)**
2	0,00001	4,5697	99,9949
3		4,56971	99,99553
4		4,56972	99,99617
5		4,56973	99,99681
6		4,56974	99,99744
7		4,56975	99,99808
8		4,56976	99,99872
9		4,56977	99,99935
10		4,56978	99,99999
11		4,56979	100,0006
12		4,5698	100,0013

	A	B	C
1	**dx**	**x**	**f(x)**
2	0,000001	4,56978	99,99999
3		4,569781	100,0001
4		4,569782	100,0001
5		4,569783	100,0002
6		4,569784	100,0002
7		4,569785	100,0003
8		4,569786	100,0004
9		4,569787	100,0004
10		4,569788	100,0005
11		4,569789	100,0006
12		4,56979	100,0006

Se ci fermiamo alla sesta cifra decimale otteniamo

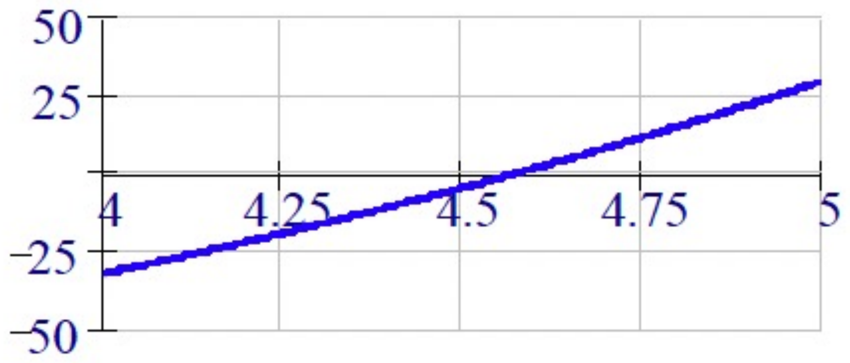
$c = 4.569780\ldots$

NEWTON'S ALGORITHM

L'algoritmo di Newton è uno dei più potenti metodi di approssimazione per le soluzioni di un'equazione. Lavoriamo sull'equazione

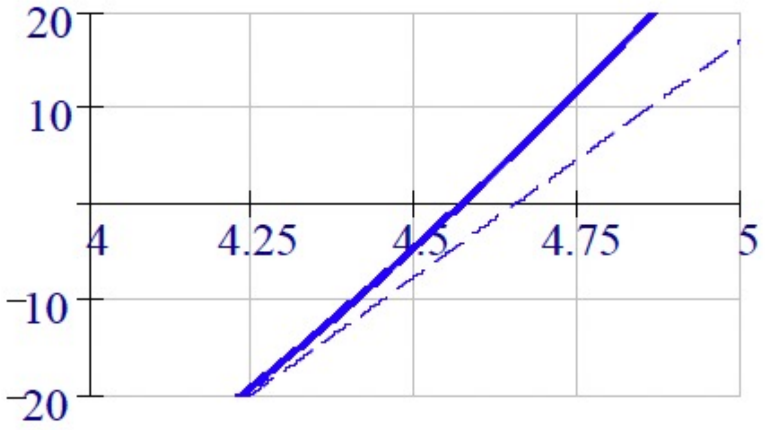
$$x^3 + x - 100 = 0$$

Posto $f(x) = x^3 + x - 100$, risulta $f(4) = -32$, $f(5) = 30$. La soluzione c è dunque compresa tra 4 e 5, e si può interpretare come l'ascissa del punto in cui il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x.



Prendiamo, come primo tentativo, $x_0 = 4$. In x_0 mandiamo la retta tangente a $f(x)$ ($f(x)$ deve dunque essere derivabile), la cui equazione è

$$y = f(4) + f'(4)(x-4) = -228 + 49x.$$



Tale retta interseca l'asse x in un punto $x_1 = 228/49 \approx 4.65$ che in generale è più vicino a c di x_0. Si prosegue nello stesso modo partendo da x_1, costruendo così una successione

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

che in generale converge (con straordinaria rapidità) a c.

Fatti i conti in generale, la successione ricorsiva che fa passare da x_n a x_{n+1} è la seguente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nel nostro esempio, poiché $f'(x) = 3x^2+1$, la successione è così definita:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 100}{3x_n^2 + 1}$$

Non ci resta che implementare in Excel questa successione. Nella colonna A costruiamo la successione dei numeri naturali 0, 1, 2, …, 20. In B2 scriviamo il valore iniziale $x_0 = 4$.
In B3 la formula
=B2−(B2^3+B2−100)/(3*B2^2+1)
che copiamo verso il basso fino alla riga 12. Ecco la tabella che otteniamo.

	A	B
1	**n**	**x[n]**
2	0	4
3	1	4,6530612244898
4	2	4,5712393790314
5	3	4,5697806213763
6	4	4,5697801629327
7	5	4,5697801629327
8	6	4,5697801629327
9	7	4,5697801629327
10	8	4,5697801629327
11	9	4,5697801629327
12	10	4,5697801629327