Il Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matematica

SONIA URSINI
Departamento de Matematica Educativa
CINVESTAV – IPN, Messico
soniaul2002@yahoo.com.mx

SUNTO

Dopo un'introduzione, nella quale si giustifica la necessità di uno strumento teorico che permetta di analizzare le concezioni degli allievi riguardo al complesso concetto di variabile algebrica e che serva da guida per progettare strategie più efficaci per favorirne l'apprendimento, si descrive brevemente uno strumento di questo tipo, chiamato Modello 3UV. Si dà poi qualche esempio atto a illustrare la sua utilità per far comprendere meglio agli insegnanti le risposte degli alunni a quesiti che coinvolgono il concetto di variabile e per progettare strategie per superare eventuali difficoltà.

PAROLE CHIAVE

INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA / TEACHING OF ALGEBRA; VARIABILI ALGEBRICHE / ALGEBRAIC VARIABLES; INCOGNITE / SPECIFIC UNKNOWNS; NUMERI GENERICI / GENERAL NUMBERS; RELAZIONI FUNZIONALI / FUNCTIONAL RELATIONS; MODELLO / MODEL; STRUMENTO TEORICO / THEORETICAL TOOL.

1. INTRODUZIONE

Per gli insegnanti di matematica di scuola secondaria non è una novità sentirsi dire che la maggior parte degli alunni delle scuole secondarie di primo e secondo grado, e anche qualche studente universitario, trova difficoltà con l'algebra. La loro esperienza quotidiana li fa annuire convinti dinanzi a tali affermazioni. Sanno molto bene che, nonostante il loro impegno come docenti, troppi studenti si bloccano o sbagliano quando vengono loro posti problemi apparentemente semplici che coinvolgono valori sconosciuti da trovare, quando si chiede loro di scoprire e simbolizzare una regola generale, di determinare intervalli o di interpretare una relazione funzionale. Se non si danno delle indicazioni precise su cosa devono fare, ma si lascia decidere a loro, incominciano le difficoltà che mettono in evidenza la superficialità di ciò che hanno imparato nei corsi di matematica e, in particolare, di algebra.

Fin dagli anni '70, quando si incominciò in varie parti del mondo a fare ricerche sistematiche riguardanti l'apprendimento della matematica da parte degli studenti, si incominciò a indagare sulle difficoltà che trovano con l'algebra e si cercò di individuarne le possibili cause. I risultati portarono alla formulazione di numerose proposte d'insegnamento, ma le difficoltà, come ben si sa, persistono ancora. Questo non è dovuto necessariamente alla adeguatezza o meno di tali proposte, visto che nel processo di apprendimento convergono tanti fattori. Tuttavia, i risultati finora ottenuti ci spingono a continuare a indagare più a fondo sulle possibili cause, cercando di individuare se ci sono, per esempio, concetti di base dell'algebra che rimangono per loro un po' avvolti nella nebbia e possono essere l'origine di certe difficoltà degli studenti.

Un primo sguardo su ciò che caratterizza l'algebra e l'inizio del suo insegnamento formale nella scuola mette in evidenza la prima e ovvia differenza fondamentale con la matematica appresa fino a quel momento, cioè l'uso delle lettere al posto dei numeri e in associazione con i numeri. Per la maggioranza degli studenti, usare le lettere che si utilizzano in algebra per rappresentare le variabili (quantità sconosciute, indeterminate, generiche) e capirne il significato comporta notevoli difficoltà. Dire questo non è una novità, infatti già dagli inizi del secolo scorso si segnalava che gli studenti trovano difficoltà con l'uso delle variabili. Lo facevano notare, per esempio, Thorndike e colleghi e più avanti Van Engen e Menger, come anche Kuchemann, Matz, Wagner, Usiskin, Philip, Warren, solo per citarne alcuni, che trattano di questo argomento nei loro lavori.[39] Tutti concordano sul fatto che la comprensione dell'algebra passa per la comprensione del concetto di variabile

[39] THORNDIKE ET AL., 1923; VAN ENGEN, 1953; MENGER, 1956; KUCHEMANN, 1980; MATZ, 1982; WAGNER, 1983; USISKIN, 1988; PHILIP, 1992; WARREN, 1999.

algebrica, ma si fa anche notare che è impossibile darne una definizione precisa, per le sue molteplici sfaccettature, e che ciò fa sì che gli studenti trovino difficoltà ad appropriarsi dell'essenza di questo concetto. Questo si manifesta soprattutto nella difficoltà a passare con flessibilità tra i diversi usi della variabile, come segnalano ad esempio Matz, Usiskin, Trigueros e Ursini, Malara e Navarra[40].

Quando si parla di usi diversi della variabile, ci si riferisce al fatto che in algebra si usano le lettere per rappresentare concetti tra loro ben distinti, come le incognite, i numeri generici e le relazioni funzionali, ognuno con proprie caratteristiche particolari, che implicano azioni ben distinte. In tutti i corsi di algebra, dagli elementari ai più complessi, troviamo questi tre usi della variabile. Nei corsi elementari della scuola secondaria le variabili si riferiscono ai numeri e sono generalmente rappresentate da lettere, ma poi, nei corsi universitari, le variabili possono essere anche funzioni, matrici, vettori, che, sebbene racchiudano anche altri concetti matematici più complessi, rappresentano in ugual modo incognite o generalizzazioni o relazioni funzionali. Si tratta quindi di un concetto presente nella gran parte dei corsi di matematica, dagli elementari ai più avanzati, ma proprio la sua versatilità lo rende un oggetto di studio difficile, anche se fondamentale. A scuola ci si aspetta che gli studenti imparino a lavorare con le variabili, con ciascuno dei loro usi e che sviluppino da soli, con la pratica, la capacità di passare con flessibilità da un uso all'altro, a seconda delle esigenze del problema posto. Sebbene parecchi studi abbiano apportato informazioni molto utili sugli errori commessi dagli studenti in relazione a ogni singolo uso della variabile e si è posto così in evidenza che ognuno di questi comporta il superamento di ostacoli epistemologici specifici, si sono lasciate un po' da parte le ulteriori difficoltà che sorgono nel passare dall'uno all'altro dei distinti usi della variabile, e quindi tra le azioni ben diverse che lo studente deve svolgere in corrispondenza a ognuno di essi. L'importanza di tener conto di ciò sta nel fatto che quasi sempre i distinti usi

[40] MATZ, 1982; USISKIN, 1988; TRIGUEROS E URSINI, 1999; MALARA E NAVARRA, 2003.

ISSN 2039-8646

della variabile compaiono all'interno di uno stesso problema, come ben illustrato ad esempio da Usiskin[41].

Tenuto conto degli errori, delle difficoltà e soprattutto delle confusioni che fanno gli studenti quando lavorano con le variabili, salta all'occhio l'assenza d'uno strumento teorico che permetta di analizzare le concezioni della variabile che hanno gli studenti, e che serva da guida per progettare strategie più efficaci per favorire l'apprendimento di questo complesso concetto. In questo articolo descriverò brevemente uno strumento di questo tipo, chiamato Modello 3UV, da me sviluppato in collaborazione con Maria Trigueros. Per poter sviluppare il Modello 3UV, un passo importante, dopo una breve analisi storica dello sviluppo del concetto di variabile[42], è stato quello di analizzare cosa implica, dal punto di vista dell'uso delle variabili, risolvere i problemi algebrici che spesso appaiono nei testi scolastici. I risultati ottenuti ci hanno permesso di identificare gli aspetti essenziali che caratterizzano i distinti usi della variabile e sono proprio questi aspetti che costituiscono il Modello 3UV[43]. L'applicazione di tale strumento ci ha permesso di individuare il grado di padronanza del concetto di variabile da parte di allievi e docenti di vari livelli scolari. Lo strumento, inoltre, è stato utilizzato per analizzare le modalità con le quali si introducono e si usano le variabili nei testi scolastici di matematica, per realizzare strumenti di diagnosi (questionari, interviste), per progettare e sviluppare attività per gli studenti (per ulteriori dettagli vedi Ursini e Trigueros[44]). Illustrerò di seguito alcune delle fasi che hanno portato alla realizzazione del modello.

2. L'USO DELLE VARIABILI NEI TESTI SCOLASTICI

Consideriamo i seguenti tre esempi di esercizi e problemi algebrici tratti da testi scolastici. Anche se si tratta di quesiti molto semplici, la loro soluzione implica una

---

41 USISKIN, 1988.
42 URSINI, 1994.
43 URSINI ET AL., 2005.
44 URSINI E TRIGUEROS, 2011.

serie di passi che gli studenti con una certa esperienza eseguono quasi senza prenderne coscienza, ma per gli altri possono risultare meno ovvi e quindi condurre a errori. Analizzandoli a fondo, si osserverà che ognuno di questi tre esempi coinvolge un diverso uso della variabile.

ESEMPIO 1

Una scatola a forma di parallelepipedo è larga 4,5 cm, alta 3 cm e il suo volume è di 81 cm³. Quanto è lunga?

Per risolvere questo problema si deve riconoscere, innanzitutto, che c'è qualcosa di sconosciuto, un'incognita, e identificarla (in questo caso si tratta della lunghezza della scatola). Anche se ciò può sembrare evidente, non è cosi per tutti gli studenti. Infatti, abbiamo constatato, sia nella scuola secondaria di primo grado che in quella di secondo grado, che non sempre gli alunni riescono a individuare l'incognita di un problema.

In secondo luogo, è necessario rappresentare l'incognita usando una lettera (per esempio, x) o un altro simbolo. Naturalmente questo problema si può risolvere anche evitando l'algebra, cosa che gli studenti fanno fin troppo volentieri, perdendo così gli enormi vantaggi offerti dall'imparare a ragionare algebricamente.

C'è poi bisogno di mettere in relazione l'incognita con i dati del problema e, ricordando (o chiedendo al docente, visto che qui non si sta facendo un test sulle conoscenze di geometria) come si calcola il volume di un parallelepipedo, ottenere l'equazione[45]:

$$4{,}5 \cdot 3 \cdot x = 81$$

Si devono poi eseguire le operazioni necessarie a determinare il valore specifico della incognita, ovvero le seguenti:

$$13{,}5 \cdot x = 81$$

[45] Naturalmente, ciò va fatto dopo aver constatato che tutte le misure sono espresse da unità di misura coerenti. Alla fine si potrà perciò esprimere il risultato con l'unità di misura corretta.

$$x = \frac{81}{13,5}$$

$$x = 6$$

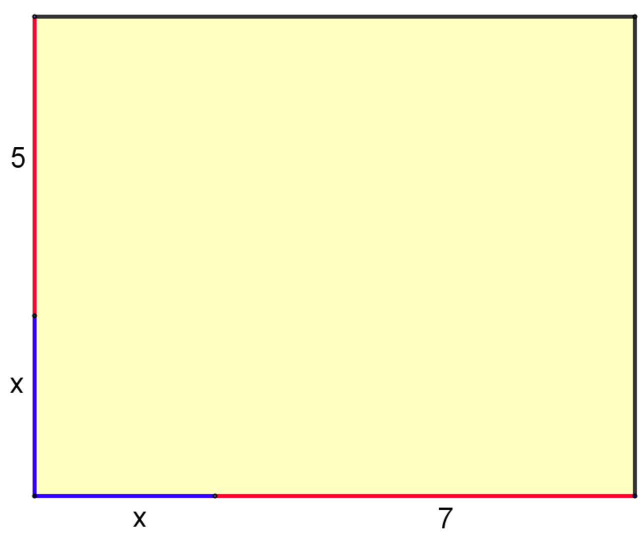
Per concludere, occorre sostituire nell'equazione il valore trovato, per verificarne la correttezza:

$$4,5 \cdot 3 \cdot 6 = 81$$

Come si può osservare da questa analisi, anche se in questo problema è coinvolta solo un'incognita, per poter rispondere lo studente deve passare attraverso molte fasi, in ognuna delle quali sono richieste competenze diverse. È importante che il docente le abbia presenti, sia per comprendere dove e perché gli studenti commettono degli errori e intervenire puntualmente per chiarire i loro misconcetti, sia per stabilire il livello di preparazione degli studenti.

ESEMPIO 2

Il seguente problema richiede di scrivere un'espressione algebrica (aperta) in corrispondenza a una figura geometrica.
Scrivi l'espressione che rappresenta l'area della seguente figura:



Per rispondere al quesito è necessario essere capaci di interpretare la lettera x come rappresentante di un numero generico. Si deve poi usare x, unitamente ai numeri 5 e 7, per scrivere delle espressioni che rappresentino la base e l'altezza del rettangolo:

$$x+7 \qquad\qquad x+5$$

Si usano poi le espressioni prodotte per ottenerne un'altra, per rappresentare l'area della figura:

$$(x+7)\cdot(x+5)$$

Come si può vedere, in questo problema la variabile si usa solo come numero generico. I risultati di numerose ricerche segnalano che operare con espressioni aperte è difficile per molti studenti.

ESEMPIO 3

Come ultimo esempio, analizziamo che cosa implica la risoluzione di un problema molto semplice che coinvolge una relazione funzionale.

Per ogni chilogrammo peso il piatto di una bilancia si sposta di 4 cm.

Scrivi la relazione che c'è tra il peso della merce e lo spostamento del piatto della bilancia.

Se il piatto della bilancia si sposta di 10,5 cm, quanto pesa la merce[46]*?*

Per rispondere è necessario riconoscere che in questo problema ci sono due quantità variabili, l'una in corrispondenza con l'altra (lo spostamento e il peso della merce).

Si deve poi tradurre in simboli queste due variabili, rappresentando così dei numeri generici, per esempio:

x (spostamento) $\qquad$ y (peso della merce)

---

[46] Si ricorda che una bilancia di questo tipo misura una forza e, in questo caso, il peso, essendo sostanzialmente un dinamometro.

 ISSN 2039-8646

Si usano poi x e y per stabilire una relazione considerando i dati del problema:

$$x = 4y$$

Per rispondere al secondo quesito del problema si deve sostituire a x (che rappresenta lo spostamento) il valore dato. Ciò cambia automaticamente il carattere dell'altra variabile, che passa da rappresentare un numero generico a rappresentare un'incognita, cioè un valore specifico che si può calcolare:

$$10{,}5 = 4y$$

Per concludere, si calcola il valore dell'incognita:

$$y = \frac{10{,}5}{4} = 2{,}625$$

In questo esempio le variabili appaiono in una relazione funzionale. Esse rappresentano dei numeri generici, però con certe restrizioni: i loro valori sono codipendenti e quando si sostituisce un valore numerico a una di esse, il carattere dell'altra muta e questa diventa un'incognita.

3. Il Modello 3UV e gli aspetti che caratterizzano i distinti usi delle variabili

Analizzando vari problemi di diverso grado di difficoltà con il metodo appena illustrato è stato possibile identificare una serie di aspetti che consideriamo basilari ed essenziali, che intervengono quando si opera con le variabili.

Innanzi tutto, possiamo affermare che gli usi della variabile sono tre: incognita, numero generico, variabili in relazione funzionale[47]. Ogni altro uso può essere ricondotto facilmente a questi tre (vedi per esempio Ursini e Triguero, 2004 per il

[47] Ursini, 1994.

caso dei parametri). Questi tre usi, assieme agli aspetti specifici che corrispondono a ognuno di essi, costituiscono quello che abbiamo chiamato il *Modello 3UV* (*3 Usi della Variabile*), di seguito descritto.

IL MODELLO 3UV

Lavorare con l'*incognita* implica:

I1 Riconoscere e identificare in una situazione problematica ciò che è sconosciuto e che può essere trovato considerando le condizioni del problema.

I2 Interpretare la variabile simbolica che appare in un'equazione come rappresentazione di valori specifici.

I3 Sostituire alla variabile i valori che rendono corretta una espressione.

I4 Determinare il valore sconosciuto che appare in una equazione o problema realizzando le operazioni algebriche e/o aritmetiche necessarie.

I5 Esprimere con simboli i valori sconosciuti identificati in una data situazione e usare tali simboli per scrivere le equazioni.

Lavorare con il *numero generico* implica:

G1 Riconoscere leggi, regole e metodi in successioni e famiglie di problemi.

G2 Interpretare la variabile simbolica come la rappresentazione di un ente generale, indeterminato, che può assumere qualsiasi valore in un contesto dato.

G3 Dedurre regole e metodi generali a partire da successioni e famiglie di problemi.

G4 Manipolare la variabile simbolica (ad es. per ridurre o sviluppare espressioni).

G5 Tradurre in simboli enunciati, regole o metodi generali.

Lavorare con le variabili in una *relazione funzionale* implica:

F1 Riconoscere la corrispondenza tra le variabili in relazione, indipendentemente dalla rappresentazione (tabella, grafico, problemi verbali, espressioni analitiche).

F2 Determinare i valori della variabile dipendente, dati i valori di quella indipendente.

F3 Determinare i valori della variabile indipendente, dati i valori di quella dipendente.

F4 Riconoscere la variazione congiunta delle variabili in relazione funzionale indipendentemente dalla rappresentazione (tabella, grafico, problemi verbali, espressioni analitiche).

F5 Determinare l'intervallo di variazione di una delle variabili, dato l'intervallo dell'altra.

F6 Tradurre in simboli una relazione funzionale basandosi sull'analisi dei dati di un problema.

Tutti questi aspetti legati all'uso delle variabili non sono qui esposti secondo il loro grado di difficoltà, né appaiono necessariamente sempre tutti in uno stesso problema. Oltre a ciò, è da segnalare che ognuno di essi, a diversi livelli di complessità, può essere presente in problemi di vario grado di difficoltà.[48]

4. UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL MODELLO 3UV

Il Modello 3UV è uno strumento teorico che serve per analizzare situazioni che coinvolgono le variabili. È stato usato per:

- creare problemi ed esercizi;
- pianificare e strutturare il lavoro da svolgere in classe;
- analizzare attività proposte da altri e che appaiono, ad esempio, nei testi scolastici;
- creare strumenti di diagnosi (esami, questionari, interviste) e quindi poter valutare come gli studenti interpretano e usano le variabili e identificare con una certa precisione dove trovano difficoltà o hanno idee confuse[49];

Ad esempio, rispondere al seguente quesito:

"*Quanti e quali valori può avere x nell'espressione* $4+x^2=x(x+1)$*?*"

implica in primo luogo interpretare la variabile *x* come un numero generico (G2 nel Modello 3UV) e manipolarla (G4), di fatto o mentalmente, per poi rendersi conto che si tratta in realtà di una incognita (I2) che ha un valore specifico (I4). Una risposta erronea a questo problema permette di concludere che lo studente ha molto probabilmente delle difficoltà di manipolazione e di interpretazione delle variabili.

D'altra parte, da una risposta corretta si può dedurre che lo studente è capace di interpretare e manipolare correttamente le variabili a questo livello di complessità.

Le risposte al seguente quesito:

"*Se* $x+y=10$ *e* $xy=7$, *trova i valori di x e y*"

non ci indicano solo se lo studente sa risolvere un sistema di equazioni, ma ci permettono di vedere se è capace di identificare le incognite del problema (I1),

---

[48] TRIGUEROS E URSINI, 2003.

[49] URSINI E TRIGUEROS, 2011.

interpretare correttamente i simboli che le rappresentano (I2) e allo stesso tempo rendersi conto che le due variabili sono in corrispondenza (F1). Il problema posto richiede anche della manipolazione (G4), il che implica interpretare le variabili come numeri generici (G2), nonostante si sappia che sono delle incognite (I2) di cui vogliamo trovare i valori. Si deve poi sostituire a *y*, in una delle espressioni, i valori trovati (I3), che possono contenere anche numeri generici per poter calcolare i valori numerici richiesti (I4). Anche se i problemi possono essere risolti in modo diverso da come descritto, un'analisi di questo tipo ci permette di individuare in che punto lo studente ha delle difficoltà e, nel contempo, quali sono le sue competenze.

5. Conclusioni

Il Modello 3UV è uno strumento teorico che è stato messo a punto in vari anni di lavoro e di prove. È stato ampiamente usato e ha dimostrato la sua utilità nei vari ambiti di applicazione, ciononostante è perfettibile. Presentarlo, seppur brevemente, in questo articolo ha lo scopo di farlo conoscere ai docenti di matematica dei vari livelli scolari, ritenendo che possa essere di aiuto per meglio comprendere le risposte degli allievi a quesiti e problemi che coinvolgono le variabili. Inoltre, potrà essere usato per progettare strategie atte ad aiutare gli studenti a superare le difficoltà individuate proprio grazie a esso. Gli esempi proposti nel testo potranno servire da guida, per iniziare ad applicare il Modello 3UV. Chi lo desidera, può approfondire e trovare spunti di applicazione, in particolare, in Ursini et al. 2005.

Bibliografia

Kuchemann D.
1980, *The understanding of Generalised Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children*, Unpublished PhD Thesis, Institute of Education University of London.

Malara N., Navarra G.
2003, ArAl Project. *Arithmetic pathways towards favouring prealgebraic thinking*, Bologna, Pitagora Editrice.

MATZ M.
1982, *Towards a process model for high school algebra errors,* in SLEEMAN D., BROWN J. J. (ED.), «Intelligent tutoring system», New York Academic Press, pp.25-50.

MENGER K.
1956, *What are x and y?,* «The Mathematical Gazette», vol. 40, pp. 246-255.

PHILIPP R. A.
1992, *The many uses of algebraic variables,* «Mathematics Teacher», vol. 85, pp. 557-561.

THORNDIKE E. L., COBB M. V., ORLEANS J. S., SYMOND P. M., WALD E., WOODYARD E.
1923, *The Psychology of algebra,* The Macmillan Company, Institute of Educational Research teachers College, Columbia University.

TRIGUEROS M., URSINI S.
1999, *Does the understanding of variable evolve through schooling?,* in ZASLAVSKY O. (ED.), «Proceedings of the XXIII PME International Conference», vol. 4, pp. 273-280.
2003, *First year undergraduates difficulties in working with the concept of variable*, «CBMS Research in Collegiate Mathematics Education», vol. 12, pp. 1-29.

USISKIN Z.
1998, *Conceptions of school algebra and uses of variables,* in COXFORD A. F., SHULTE A. P. (ED.), «The Ideas of Algebra K-12», pp. 8-19.

URSINI S.
1994, *Pupils' Approaches to Different Charactersations of Variable in Logo,* Unpublished PhD Thesis, Institute of Education University of London.

URSINI S., ESCAREÑO F., MONTES D., TRIGUEROS M.
2005, *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa*, México D. F., Editorial Trillas.

URSINI S., TRIGUEROS M.
2004, *How do high school students interpret parameters in algebra?,* in HØINES M. J., FUGLESTAD A. B. (ED.), «Proceedings of the XXVIII PME International Conference», vol. 4, pp. 361-368.
2011, *The role of variable in elementary algebra: An approach through the 3UV Model,* in «Progress in Education», Progress in Education Series, vol. 19, pp. 1-38.

VAN ENGEN Z.
1953, *The formation of concepts, the learning of mathematics,* in FEBR H. F. (ED.), «The learning of mathematics: its theory and practice», XXI Yearbook, NCTM, pp. 69-98.

WAGNER S.
1983, *What are these things called variables?,* «Mathematics Teacher», October, pp. 474-479.

WARREN E.
1999, *The concept of variable: gauging students' understanding,* in ZASLAVSKY O. (ED.), «Proceedings of the XXIII PME International Conference», vol. 4, pp. 313-320.