QUADERNO n.9

A cura di:
Giancarlo Navarra
Salvatore Sini

Revisione di Nicolina A. Malara

Approccio ai numeri relativi dalla quarta primaria alla prima secondaria. Tracce di lavoro

Terza versione

www.aralweb.unimore.it

gennaio 2011

Indice ragionato

I numeri relativi nei programmi italiani (Indice)
(scuola primaria e prima secondaria di primo grado)

A. I programmi della scuola elementare, 1985
Obiettivi del terzo, quarto e quinto anno

- ...
- confrontare e ordinare sulla linea dei numeri gli interi relativi, facendo riferimento, se necessario, a esperienze personali (ad esempio, l'uso del termometro);
- ...

B. Allegati al Decreto Legislativo 19 febbraio 2004, n. 59
B$_1$. Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria
Obiettivi specifici di apprendimento per le classi quarta e quinta (secondo biennio)

MATEMATICA	
il numero	
- ... - Introduzione in contesti concreti dei numeri interi relativi (positivi, nulli, negativi). - Ordinamento dei numeri interi relativi sulla retta numerica. -	- ... - Rappresentare i numeri sulla retta numerica. - ...

B$_2$. Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di 1° grado
Obiettivi specifici di apprendimento per le classi prima e seconda (primo biennio)

MATEMATICA	
Ripresa complessiva dei numeri interi e dell'aritmetica della Scuola Primaria: • ... • numeri interi relativi • ...	Risolvere problemi e calcolare semplici espressioni tra numeri interi mediante l'uso delle quattro operazioni. - ...

C. Le Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione, Roma Settembre 2007 (Ministro Fioroni)
Obiettivi di apprendimento al termine della classe **quinta** della scuola **primaria**

Numeri

- ...
- Interpretare i numeri interi negativi in contesti concreti.
- ...
- Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.

(Indice)

Alcuni appunti iniziali (Indice)

- Le attività che proporremo sono *attività generative concrete*, ossia: hanno il compito di *far nascere l'esigenza di utilizzare i numeri con segno come strumenti di rappresentazione delle esperienze svolte*, trasferendo poi su questi nuovi numeri le conoscenze sui naturali e scoprendo gradualmente analogie e differenze.
- Il concetto di negatività può essere difficile da spiegare ad alunni giovani. Ciò deriva in parte dal fatto che, dal punto di vista di un bambino, non vi sono in natura esempi evidenti di numeri negativi.
- Temperature 'sotto lo zero' sono una costruzione artificiale, come pure l'idea di 'sotto il livello del mare', o di 'piani in un edificio al di sotto del piano terra'.
- I bambini di solito non capiscono dall'oggi al domani il concetto di *negatività*. Tuttavia, *sarà proprio l'esperienza con una vasta gamma di situazioni favorevoli, molto diluita nel tempo, che consentirà loro di costruire le connessioni necessarie per la costruzione di conoscenze di base forti di questo concetto*.
- Gli alunni dovrebbero essere incoraggiati a pensare a *loro* esempi di negatività. Ad esempio vanno esplorati concetti come avanti e indietro, su e giù, dare e prendere, caldo e freddo.
- Poiché la retta dei numeri è la componente monodimensionale del sistema di coordinate cartesiane, conviene riferirsi ad essa sia in orizzontale (futuro asse delle ascisse) sia in verticale (futuro asse delle ordinate).
- Si sottoporrà a sperimentazione, per valutare la sua efficacia, la diversa rappresentazione dei numeri con segno e delle operazioni tra di essi. Questa differenziazione è diffusa nei sistemi educativi in ambiente anglosassone; è stato proposto, molti anni fa, nel libro di testo per la scuola media di Francesco Speranza (ed. Zanichelli). Per i primi si adotterà un apice a sinistra del numero, ad es:

  $$^{+}12 \qquad ^{-}5$$

- Per i segni delle operazioni si userà la notazione classica. Le parentesi si possono introdurre per sottolineare *l'individualità* del numero con segno ma si sottolinea il fatto che non sono necessarie. Ad es:

  $$^{+}7+(^{-}6)=^{+}1 \qquad (^{-}8)\times(^{-}4)=^{+}32 \qquad (^{-}5)+(^{+}6)-(^{+}4)=^{-}3$$

  oppure:

  $$^{+}7+^{-}6=^{+}1 \qquad ^{-}8\times^{-}4=^{+}32 \qquad ^{-}5+^{+}6-^{+}4=^{-}3$$

  Un'altra strategia per differenziare i due tipi di segni (v. capitolo successivo) è quella di colorare in modo diverso, in una prima fase, i segni, per esempio:

  $$^{+}7+^{-}6=^{+}1 \qquad ^{-}8\times^{-}4=^{+}32 \qquad ^{-}5+^{+}6-^{+}4=^{-}3$$

Indice

Ipotesi di percorso (Indice)

L'approccio al *numero con segno* viene lasciato all'insegnante, che utilizzerà i suoi testi e la sua esperienza per affrontarlo. Qui proponiamo alcune situazioni problematiche tipo che dovrebbero porre in evidenza se l'alunno sta maturando o meno le competenze come prevede l'insegnante.

Questo primo percorso introduce gli alunni ad una varietà di usi quotidiani dei numeri relativi, in contesti che includono temperature e situazioni sopra e sotto il livello del mare. *Lo scopo è quello di far emergere la necessità (nell'uso comune, prima che matematico) dei numeri relativi, per fare in modo che gli alunni familiarizzino con il loro uso*.

Anticipiamo qui che in un secondo momento introdurremo la differenza fra **segni predicativi** e **segni operazionali** (quelli delle operazioni binarie). Nel primo caso in qualche sperimentazione si potrebbe usare la notazione anglosassone (usata peraltro, in Italia, anche da Francesco Speranza nel suo testo per la scuola media) in cui i segni predicativi vengono indicati con un apice sinistro, per distinguerli da quelli operazionali. Ad esempio:

$$(+3)+(-5)-(+6) \rightarrow {}^{+}3+{}^{-}5-{}^{+}6$$

1. Contesti esperienziali (tipo) per la generazione dei numeri con segno (Indice)

1.1. Conoscenze di base su termometri e temperature

Il livello delle conoscenze dipenderà dalla classe e dalle intenzioni didattiche dell'insegnante (vari tipi di termometri: meteorologico, clinico, caldaia, forno, ecc), rilievi anche giornalieri, ecc.

1.2. Le temperature

Associare alcune immagini (quelle riportate sono solo un esempio) a delle temperature argomentando la scelta (alla stessa situazione si possono associare più temperature); per esempio:

-45° +50° +22° 0° -2°

1.3. Conoscenze legate al termometro clinico

Disegnare un termometro clinico nel modo più verosimile.
Si confrontano i disegni e si verificano collettivamente la posizione del bulbo, l'unità di misura, l'attendibilità delle temperature minima e massima, la simbologia usata. Si attiva la discussione.

1.4. Conoscenze legate al termometro metereologico

Disegnare un termometro nel modo più verosimile. Si verificano collettivamente la posizione del bulbo, l'unità di misura, lo zero, la simbologia usata. Si attiva la discussione.

1.5. Conoscenze legate al termometro

Individuare su un termometro 'muto' delle temperature argomentando le scelte.

2. Confronto tra numeri con segno (Indice)

☞ *L'**argomentazione** è un aspetto assolutamente fondamentale di tutta l'attività, in quanto anticipa e dà significato alla **rappresentazione** in linguaggio matematico, l'insegnante è invitato a favorire questo aspetto in tutte le fasi dell'attività, a maggior ragione quando pone alla classe delle questioni, come nella prossima situazione problematica.*

2.1. Confronto tra temperature

Situazione problematica.

Alle 10:45 la temperatura a Modena è $^{-}5$°. Osservate questi cartelli:

4 Gennaio ore 10:45 temp. $^{-}5$°	*4 Gennaio ore 11:00 temp. $^{-}4$°*	*4 Gennaio ore 12:00 temp. $^{-}2$°*	*4 Gennaio ore 15:00 temp. $^{+}2$°*	*4 Gennaio ore 18:30 temp. $^{-}6$°*

(a) La temperatura è salita o scesa fra le 10:45 e le 11:00? Argomenta la risposta.
(b) Di quanti gradi è cresciuta la temperatura fra le 11:00 e le 12:00? Argomenta la risposta.
(c) Quand'è che fa più freddo, alle 18:30 o alle 11:00? Argomenta la risposta.

☞ *Nel quarto cartello si è scritto '$^{+}2$°'. Si può anche fare a meno di inserire nelle temperature positive il segno '$^{+}$', come si fa spesso, nella quotidianità, quando alla scrittura '2°' si attribuisce implicitamente un valore positivo.*

☞ *Anticipiamo che numeri come $^{-}3$, $^{-}12$, $^{-}6$, ... sono usati per rappresentare* **posizioni** *sulla scala. Più avanti questi numeri verranno usati anche per indicare anche dei* **cambiamenti**, *e **per differenziarli verranno scritti in colore rosso.***
Questa strategia verrà usata anche con gli alunni.

Si propone poi una fase importante e delicata: usare uno strumento per registrare e confrontare i dati relativi ai cambiamenti di temperatura. Si tratta di costruire una tabella.

☞ *La tabella è uno strumento prezioso per esplorare una situazione problematica.*

Possiamo ipotizzare questa successione di fasi:

- Si imposta la tabella lasciando alla classe un ampio margine di autonomia nella progettazione della sua impostazione;
- Si chiede, in prima battuta, di esprimere a parole 'ciò che succede' in una certa casella; per esempio, nella prima in alto a sinistra "Dalle 10 e 45 alle 11 la temperatura si alza di un grado", oppure "... aumenta... ", oppure "... cresce... ";
- Si chiede agli alunni come si potrebbe tradurre per Brioshi la frase;
- Si giunge alla rappresentazione in linguaggio matematico ($^{+}1$ significa che cresce di 1°, $^{-}2$ che diminuisce di 2° e così via) come sintesi fra linguaggio naturale e aritmetico.

La tabella vuota:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Cambiamenti di temperatura</td><td colspan="4">Alle</td></tr>
<tr><td>11.00</td><td>12:00</td><td>15:00</td><td>18:30</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Dalle</td><td>10:45</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11:00</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12:00</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15:00</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

La tabella completata:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Cambiamenti di temperatura</td><td colspan="4">Alle</td></tr>
<tr><td>11.00</td><td>12:00</td><td>15:00</td><td>18:30</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Dalle</td><td>10:45</td><td>$^{+}1$</td><td>$^{+}3$</td><td>$^{+}7$</td><td>$^{-}1$</td></tr>
<tr><td>11:00</td><td></td><td>$^{+}2$</td><td>$^{+}6$</td><td>$^{-}2$</td></tr>
<tr><td>12:00</td><td></td><td></td><td>$^{+}4$</td><td>$^{-}4$</td></tr>
<tr><td>15:00</td><td></td><td></td><td></td><td>$^{-}8$</td></tr>
</table>

2.2. *Confronto tra temperature*

Alle 22:30 la temperatura è di $^{-}4°$. Durante l'ora successiva cambia di **$^{-}2°$** (come abbiamo fatto nella tabella precedente, d'ora in poi **segneremo sempre in rosso i cambiamenti**).

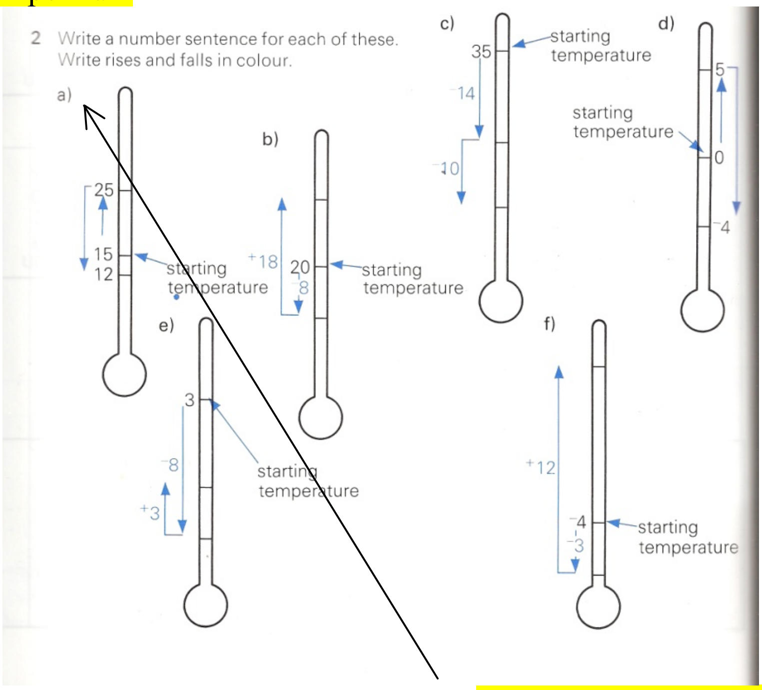
(a) Qual è la temperatura alle 23:30? Argomenta la risposta.

(b) A mezzanotte il termometro mostra $^{+}2°$. Descrivi a parole com'è cambiata la temperatura dalle 23:30. Indica il cambiamento usando, come prima, il colore.

3. Descrivere cambiamenti nei linguaggi naturale e matematico (Indice)

☞ *La compresenza dei due significati dei numeri per indicare sia le **posizioni** che i **cambiamenti** nella stessa frase serve per chiarire la differenza fra i due significati. Questo è importante in questa fase in cui i numeri con segno emergono da esperienze concrete; è però del tutto provvisoria perché poi, di fatto, la differenza scompare. Ora è importante enfatizzarla.*

3.1. Variazioni di temperatura



Cominciamo facendo analizzare alla classe il disegno (a). Possiamo dare la consegna di descrivere in linguaggio naturale come si comporta la temperatura in questo caso e di raccontarlo poi a Brioshi. Poi alcuni alunni leggono la loro descrizione, per esempio:

"La temperatura cresce da 15° a 25°, poi diminuisce fino a 12°. Da 15° a 25° cresce di 10° e questo lo rappresento con '$^{+}\mathbf{10}$'; da 25° a 12° diminuisce di 13° e lo rappresento con '$^{-}\mathbf{13}$'. Quindi scrivo: $15+{}^{+}\mathbf{10}+{}^{-}\mathbf{13}$. Faccio i calcoli e concludo che ora la temperatura è di 12°

Le scritture (ce ne possono essere di impreviste) vengono confrontate e discusse; ad es:

(a) $15+{}^{+}\mathbf{10}+{}^{-}\mathbf{13}$; (b) $^{+}\mathbf{15}+{}^{+}10+{}^{-}13$; (c) $15+10-13$; (d) $15+{}^{+}\mathbf{10}-{}^{+}\mathbf{13}$

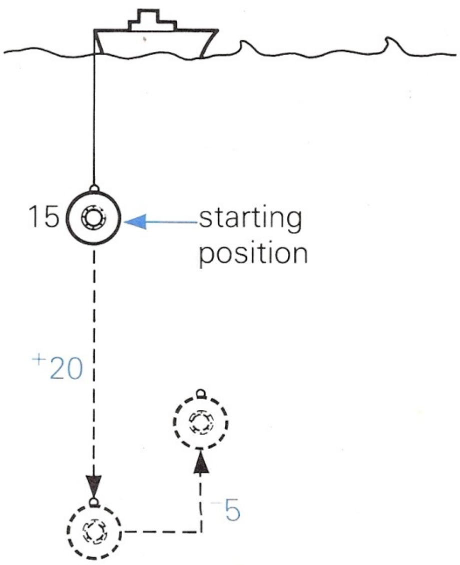
☞ *Il segno '+' fra i numeri traduce in linguaggio matematico il significato di '**si aggiunge**' e gli alunni possono usare questa allocuzione. Ma durante l'attività qualche alunno potrebbe suggerire l'idea di un 'cambiamento negativo' ($-{}^{+}13$) come nel caso (d). Questa situazione potrebbe portare a riflessioni molto interessanti, ma in questo momento si suggerisce di usare la metafora del frigorifero ('mettiamo nel frigorifero questa frase; la tireremo fuori tra un po' di tempo') e far proseguire, a questo stadio, con il solo **segno operazionale** di **addizione**.*

3.2. La campana subacquea

☞ *Come si vedrà, in questa situazione viene proposto un punto di vista diverso rispetto a quello standard. Normalmente si considera la 'situazione zero' fissa (il livello del mare, lo zero del termometro, il piano terra, e così via.* Qui invece si relativizzano non soltanto lo zero ma anche i versi in cui vengono visti i numeri positivi e quelli negativi. *In sostanza: lo zero viene traslato, e ogni posizione della campana può diventare un nuovo zero.*
Analogamente, immaginando che ciò che importa in questo caso sia, per esempio, raggiungere il fondo marino per poter osservare il relitto di un galeone spagnolo, la discesa può essere vista come fatto positivo, e quindi 'i numeri positivi scendono'. Risalire mi allontana dall'obiettivo, e quindi prevale l'aspetto psicologico che 'i numeri negativi salgono'. Ricordiamo che qui non c'è ancora l'aritmetica dei numeri relativi, siamo ancora ad un livello fondativo: i segni individuano delle azioni (spostamenti, variazioni, ecc.) in un determinato contesto.
Un esempio analogo, recentissimo, può essere costituito dal salvataggio dei minatori cileni. Poiché il raggiungerli significava 'vittoria', i giornali riportavano la notizia dell'avvicinamento alla galleria con un 'più 130 metri!'.

Gli alunni hanno a disposizione il disegno a destra.
Si chiede di descrivere a parole la situazione così com'è rappresentata. Una descrizione potrebbe essere:

"La campana viene abbassata di 20 metri rispetto alla posizione iniziale, che è a 15 metri di profondità. Poi viene fatta risalire di 5 metri".



Poi si chiede di raccontare a Brioshi la situazione. Per esempio:

$$15+{}^{+}\mathbf{20}+{}^{-}\mathbf{5}=30$$

Bisogna aspettarsi di gestire anche scritture in cui i segni '+' e '-' siano interpretati in modo diverso.

3.3. I soldi di Piero

Piero, fratello maggiore di Silvia, ha in un posto che solo lui sa €50.
Sabato decide di andare a mangiare una pizza con gli amici e prende €10.
Lunedì deve comperare una ricarica per il telefonino e prende altri €20.
Silvia descrive la situazione per Brioshi in questo modo:

$$50+{}^{-}\mathbf{10}+{}^{-}\mathbf{20}$$

Secondo te la frase di Silvia è corretta? Argomenta la risposta.

☞ *In queste prime fasi il simbolo '+' può essere interpretato come '<u>e poi</u>'; nell'esempio: Silvia ha €50, <u>poi</u> ne spende 10, <u>poi</u> altri 20".*

3.4. I risparmi di Federica

Federica ha €20 dentro un suo cassetto.
Riceve altri €6 dalla nonna e li aggiunge a quelli che ha già.
Un giorno si compera un CD e spende €12.
Ora nel cassetto sono rimasti €14.

Rappresenta la situazione per Brioshi cominciando dall'inizio.

Una risposta potrebbe essere (se lo si ritiene opportuno, '+' mantiene il significato di 'poi'):

$$20+{}^{+}\mathbf{6}+{}^{-}\mathbf{12}=14$$

☞ *Possono essere accettate – ma vanno negoziate con gli alunni – eventuali scritture contenenti delle parentesi, ad esempio: $20+({}^{+}6)+({}^{-}12)=14$.*

☞ *Anche in questo caso, il concetto di 'prelevare' implicito in 'spendere' potrebbe indurre in qualche alunno il segno di sottrazione e/o un segno negativo prima del numero; nel caso precedente: invece che '$+{}^{-}12$', '$-{}^{+}12$' o '$-{}^{-}12$'. Le discussioni vanno affrontate perché (a seconda dell'età degli alunni) possono condurre a riflessioni interessanti, ma per la quarta (è solo un'ipotesi) potrebbe essere messa in frigorifero, se l'insegnante dovesse accorgersi che l'argomento è ancora prematuro.*

3.5. La mongolfiera

Si racconta un episodio: "La mongolfiera ArAl si trova ad una quota di 10 metri. Poi il pilota deve alzarla di 5 metri per non urtare le cime di alcuni alberi. Successivamente scende di 4 metri per non urtare uno stormo di uccelli e così si trova a 11 metri di altezza".

Rappresenta la situazione in linguaggio matematico.

Una risposta: $10+{}^{+}\mathbf{5}+{}^{-}\mathbf{4}=11$

☞ *Come abbiamo scritto in una Nota precedente, i numeri con segno possono assumere due significati, a seconda che indichino le **posizioni** o i **cambiamenti.***
Nell'esempio della mongolfiera, quindi, l'innalzamento di 5 metri è rappresentato con un $^{+}\mathbf{5}$ *perché si tratta di un **cambiamento**. Se la mongolfiera si trovasse in un certo momento a 5 metri di altezza, si userebbe la rappresentazione* $^{+}5$ *perché si indica una **posizione**.*
Questo varrà nel caso delle temperature, dell'altezza di una mongolfiera, della profondità di una campana subacquea, della posizione di un ascensore, dei gradini di una scala, e così via.
Il verso positivo dello spostamento va di volta in volta concordato con la classe; sul Quaderno – e in classe – si potrebbe indicare di volta in volta convenzionalmente la scelta con '↓+' oppure con '↑+'*).*

Attività con posizioni e cambiamenti introducendo questa convenzione.

3.6. Chiedere agli alunni di attribuire significato a dei numeri in relazione ad un contesto a scelta; per esempio:

$+9 \qquad \mathbf{-24} \qquad \mathbf{+2} \qquad {}^{-}\mathbf{15}$

$^{+}9$: "Il termometro segna una temperatura di 9° sopra lo zero".
$^{-}\mathbf{24}$: "Una mongolfiera si è abbassata di 24 metri".
$^{+}\mathbf{2}$: "L'ascensore è salito di due piani".
$^{-}\mathbf{15}$: "La campana pneumatica è salita di 15 metri" (la convenzione di '+' e '-' è quella di 3.2.).

3.7. Chiedere di scrivere una storia per questa frase:

$4+{}^{+}\mathbf{3}+{}^{-}\mathbf{4}=3$

Per esempio:
"Alle 6 di oggi la temperatura era 4 gradi sopra lo zero, alle 8 era già salita di 3 gradi ma a mezzogiorno è nuovamente scesa, questa volta di 4 gradi, arrivando a 3 gradi, di un grado inferiore rispetto alle 6".
"Un passero si trova su un ramo a 4 metri di altezza. Spicca il volo e si abbassa di 3 metri, ma vede un gatto e si alza velocemente di 4 metri. Ora si trova a tre metri di altezza." (↓+)

☞ *È probabile che gli alunni tendano a delle semplificazioni delle storie raccontate presentando profili bassi sul piano linguistico. Si può proporre una sorta di 'premio letterario' per le storie più interessanti e più espressive.*

3.8. Una 'sfida'.

☞ *Perché 'sfida': La prossima situazione ha la configurazione di una* sfida *perché la costruzione delle soluzioni imporrà agli alunni la scelta di propri modelli interpretativi. Intendiamo dire che è tutt'altro che banale cercare delle soluzioni quando le frasi non hanno riferimenti concreti com'è accaduto finora. Gli alunni cioè si misurano con degli* oggetti matematici *dotati di una loro semantica, indipendente da quella di un contesto (che è assente).*

☞ *L'incognita: per* l'incognita *si userà una lettera se gli alunni stanno lavorando in ambiente early algebra, un simbolo iconico se sono abituati a questo dall'insegnante attraverso (come spesso accade) esercizi presenti nel libro di testo. Qui useremo delle lettere.*

☞ *La verbalizzazione: l'insegnante non si accontenterà di ricevere in risposta alla sfida dei numeri al posto delle lettere. Si potrebbe pensare alle prime tre frasi come lavoro collettivo in cui l'esplorazione sia obbligatoriamente svolta ad alta voce. In questo modo l'insegnante si rende conto se gli alunni preferiscono appoggiarsi a situazioni concrete o se accettano la sfida e si collocano su un piano più astratto. Per esempio, in questo secondo caso:*
(a) "A 4 devo togliere 3, e quindi trovo 1. a vale 1".
(b) "A quale numero devo togliere 6 per ottenere 2? Dovrebbe essere 8" Oppure "Se aggiungo 6 a 2 trovo 8, che è il numero n'.
(c) "Per ottenere 0, bisogna togliere 2, cioè devo aggiungere 'meno 2', quindi b è 'meno 2'".

Completate le seguenti frasi:

(a) $4+{}^{-}\mathbf{3}=a$ (b) $n+{}^{-}\mathbf{6}=2$ (c) $2+b=0$ (d) $c+{}^{+}\mathbf{4}=7$ (e) ${}^{-}3+{}^{-}\mathbf{2}=x$ $y+{}^{+}\mathbf{1}={}^{-}4$

Le soluzioni:

(a) $4+{}^{-}\mathbf{3}=1$ (b) $8+{}^{-}\mathbf{6}=2$ (c) $2+{}^{-}\mathbf{2}=0$ (d) $3+{}^{+}\mathbf{4}=7$ (e) ${}^{-}3+{}^{-}\mathbf{2}={}^{-}5$ ${}^{-}5+{}^{+}\mathbf{1}={}^{-}4$

3.9. Una seconda sfida.

C'è qualcosa di guasto nel congelatore del signor Rossi!
Alle tre di notte la temperatura era di $^-15°$. Ecco com'è cambiata nelle tre ore successive:

Ora	Variazioni di temperatura
3.00 – 4.00	$^-\mathbf{7}$
4.00 – 5.00	$^+\mathbf{8}$
5.00 – 6.00	$^+\mathbf{12}$

(a) Alle 7 la temperatura è di 2°. Com'è cambiata fra le 6.00 e le 7.00?

L'alunno deve partire dalla temperatura alle 3 di notte ($^-15°$), aggiungere le temperature successive, trovare quindi la temperatura alle 6 e infine confrontarla con quella delle 7. Una rappresentazione è:

$$^-15+{}^-\mathbf{7}+{}^+\mathbf{8}+{}^+\mathbf{12}={}^-2$$

Il confronto porta a dire che fra le 6 e le 7 la temperatura è aumentata da $^-2°$ a $^+2°$, quindi è salita di 4°.

☞ *Una rappresentazione più evoluta (da una seconda secondaria in poi) potrebbe essere:*

$$^-15+{}^-\mathbf{7}+{}^+\mathbf{8}+{}^+\mathbf{12}+t={}^+2$$

La soluzione richiede un passaggio algebrico ($^-2+t={}^+2 \;\rightarrow\; t={}^+2{}^+2 \;\rightarrow\; t={}^+4$).

4. Numeri per le posizioni, numeri per i cambiamenti (Indice)

4.1. La tabella rappresenta le variazioni della temperatura rispetto al giorno precedente in una località sciistica:

	Dom	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab
Temperatura di oggi alle 12		2°	0°	3°	0°	$^{-}1$°	$^{-}3$°
Variazione rispetto al giorno precedente	**$^{+}6$°**	**$^{-}1$°**	**$^{-}2$°**	**$^{+}3$°**			

☞ *Le risposte alle prossime questioni vanno come il solito argomentate a voce alta (ed eventualmente confutate dai compagni). Naturalmente è possibile proporle anche come prove individuali, e in questo caso si chiede una argomentazione scritta, il più possibile esauriente (questa caratteristiche dovrebbe emergere dal confronto collettivo delle argomentazioni).*
Una indubbia difficoltà è collegata alla dimestichezza che la classe ha con lo strumento tabella. In questo senso l'insegnante farà esplorare la tabella in modo da far emergere le relazioni fra i dati e quindi la loro interpretazione.

(a) Scrivi le temperature mancanti di giovedì, venerdì e sabato.
Es: "Poiché mercoledì alle 12 la temperatura è di 3° e giovedì è di 0°, questo significa che la temperatura è diminuita di tre gradi. Quindi scrivo '$^{-}3$' in rosso perché così si indica il cambiamento". Ecc.
(b) Quale è la temperatura alle 12 della domenica?
Es: "Lunedì alle 12 la temperatura è di 2° ed è diminuita di 1° rispetto a domenica. Domenica mattina la temperatura è quindi di 3°".
(c) Quale era la temperatura alle 12 del sabato precedente?
Es: "Domenica alle 12 la temperatura, che è di 3°, è cresciuta di 6° rispetto alla stessa ora di sabato. Questo significa che sabato alle 12 la temperatura era di $^{-}3$°".

La tabella completata:

	Dom	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab
Temperatura di oggi alle 12	3°	2°	0°	3°	0°	$^{-}1$°	$^{-}3$°
Variazione rispetto al giorno precedente	**$^{+}6$°**	**$^{-}1$°**	**$^{-}2$°**	**$^{+}3$°**	**$^{-}3$°**	**$^{-}1$**	**$^{-}2$°**

4.2. Il sottomarino

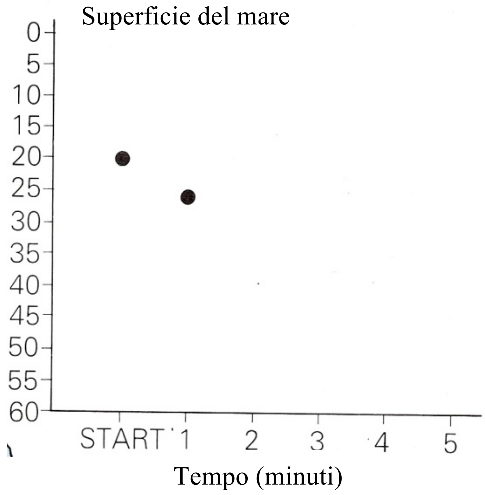
Si userà ancora la convenzione - analogamente a quanto è stato fatto in *7.2. La campana subacquea* – che '$^{+}7$' significa una discesa di 7 metri, e '$^{-}4$' una risalita di 4 metri.
Ora il sottomarino si trova ad una profondità di 20 metri.
I prossimi dati rappresentano i cambiamenti della sua profondità ogni minuto per i prossimi 5 minuti:

dopo	1'	2'	3'	4'	5'
	$^{+}6$	**$^{-}11$**	**$^{+}7$**	**$^{-}12$**	**$^{-}10$**

(a) A che profondità si trova il sottomarino alla fine di ogni minuto?

(b) Riporta su un foglio quadrettato (o su carta millimetrata) gli spostamenti del sottomarino.
Cosa indicano i due punti del grafico accanto?

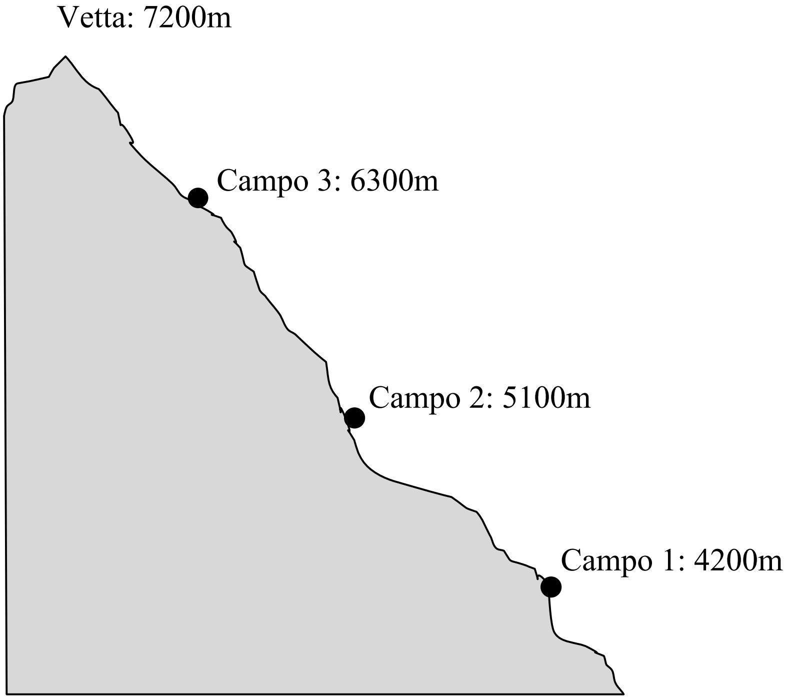
☞ *Questa parte dell'attività vuole costituire solo uno spunto. Se la classe non ha ancora maturato esperienza col piano cartesiano, si può evitare di proporla.*
Si fa comunque notare che è un piano 'sui generis' perché sull'asse delle ordinate in numeri sono scritti in modo realistico, con lo zero in alto (livello del mare), e questo favorisce un approccio naif.



4.3. I campi base di una scalata

Il disegno mostra una montagna della catena delle Ande con i campi base degli scalatori.
Completa la tabella che mostra le differenze di quota tra i campi e la vetta.
(a) Perché alcune caselle sono colorate di grigio?
(b) Che informazioni ti danno i numeri già inseriti?

Da \ A	C1	C2	C3	V
V				
C3		$^{-}1200$		
C2	$^{-}900$			
C1		$^{+}900$		



4.4. Consumo di gasolio

La prossima tabella registra il consumo di benzina del papà di Arnold e mostra quanta benzina è stata consumata o aggiunta ogni giorno.
Su questa tabella sta lavorando anche la classe di Brioshi, e quindi le vostre due classi si scambieranno messaggi che la riguardano.
Cominciate con l'analizzare i due suggerimenti; poi alcuni di voi li spiegheranno ai compagni.

	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab	Dom
Prima settimana	$^{-}\mathbf{20}$	$^{-}\mathbf{10}$	$^{+}\mathbf{15}$	$^{-}\mathbf{20}$	$^{+}\mathbf{10}$	**0**	**0**
Seconda settimana	$^{+}\mathbf{15}$						

Lunedì sono stati consumati 20 litri di benzina

Mercoledì sono stati messi nel serbatoio 15 litri di benzina

(a) All'inizio della prima settimana c'erano 50 litri di benzina nel serbatoio. Arnold propone di mandare a Brioshi questo messaggio per fargli capire il consumo di lunedì:

$$50+^{-}\mathbf{20}=30$$

Interpretalo e spiegalo.

(b) Brioshi ci manda questo messaggio relativo a martedì.

$$30+^{-}\mathbf{10}=b$$

(b_1) Come possiamo interpretarlo?
(b_2) Come ha fatto Brioshi a scrivere il 30?
(b_3) Come potremmo rispondergli?

Es: "Il quesito (a) ci ha detto che all'inizio della settimana nel serbatoio c'erano 50 litri. Siccome lunedì il papà di Arnold ha consumato 20 litri gliene sono rimasti 30 nel serbatoio, ed ecco spiegato il numero 30. Poi ne ha consumati 10 e quindi gliene sono rimasti 20. Potremmo rispondergli per esempio b=20".

(b_4) Adesso che avete capito, come potremmo scrivere in modo più trasparente il messaggio di Brioshi (pensa alle rappresentazioni non canoniche...)?

$$(50+^{-}\mathbf{20})+^{-}\mathbf{10}=b$$

(c) Descrivi tu a parole come sono andate le cose con la benzina, e quanta ne è rimasta, mercoledì e giovedì. Poi traduci quello che hai detto in linguaggio matematico e inviamo le due frasi a Brioshi.

Es: "Se martedì sono rimasti nel serbatoio 20 litri e mercoledì ne sono stati aggiunti 15, mercoledì in tutto ce n'erano 35. Siccome giovedì ne ha consumati 20, ne sono rimasti 15.

$$20+^{+}\mathbf{15}=35 \qquad 35+-\mathbf{20}=15$$

(d) Spiega prima a parole e poi in linguaggio matematico per Brioshi quanta benzina c'è nel serbatoio alla fine della prima settimana. Quale spiegazione è secondo te più chiara?

$$50+^{-}\mathbf{20}+^{-}\mathbf{10}+^{+}\mathbf{15}+^{-}\mathbf{20}+^{+}\mathbf{10}=25$$

(e) Spiega prima a parole e poi in linguaggio matematico per Brioshi quanta benzina c'è nel serbatoio alla fine del lunedì della seconda settimana.

$$25+^{+}\mathbf{15}=35$$

☞ *L'insegnante potrebbe utilizzare le scritture della situazione precedente per cominciare a far riflettere gli alunni sulle operazioni che hanno, di fatto, svolto e far quindi scoprire che le rappresentazioni si possono semplificare, rendendo più economiche le scritture.*

Alcuni esempi:

(a) $50+{}^{-}\mathbf{20}=30 \rightarrow 50-20=30$

(b_4) $(50+{}^{-}\mathbf{20})+{}^{-}\mathbf{10}=b \rightarrow (50-20)-10=b$

(d) $50+{}^{-}\mathbf{20}+{}^{-}\mathbf{10}+{}^{+}\mathbf{15}+{}^{-}\mathbf{20}+{}^{+}\mathbf{10}=25 \rightarrow 50-20-10+15-20+10=25$

Questo approccio alla semplificazione può avvenire solo se il primo termine è positivo. Se è negativo produrrebbe probabilmente delle interferenze di significato che sarebbe prematuro affrontare.

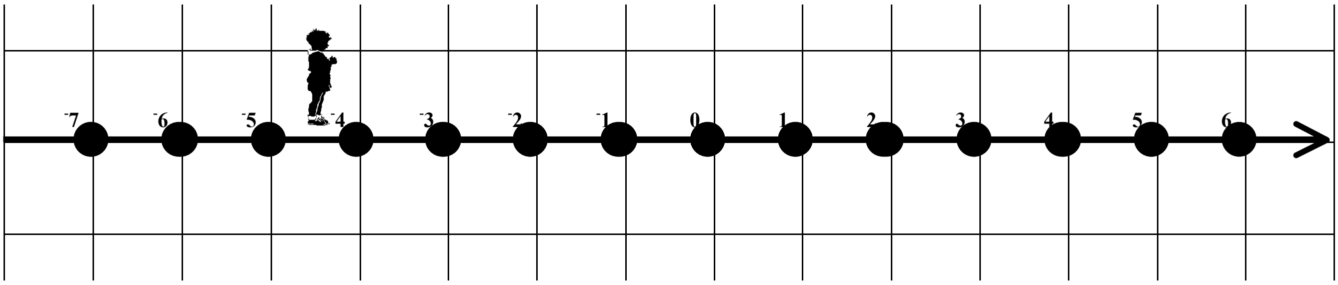
Il tema verrà ripreso quando si lavorerà con le 'tessere dei numeri relativi'.

4.5. Completare frasi matematiche prive di contesto

(a) $4+{}^{-}\mathbf{6}=a$ (b) ${}^{-}5+{}^{-}\mathbf{6}=b$ (c) $7+c={}^{-}2$ (d) $d+{}^{+}\mathbf{2}=0$ (e) $e+{}^{+}\mathbf{5}=-1$ (f) ${}^{-}3+f={}^{+}12$

5. Posizioni e movimenti sulla linea dei numeri e nel piano cartesiano (Indice)

5.1. Sul pavimento dell'aula di Arnold, formato da piastrelle quadrate, è stata costruita una linea dei numeri. Nell'incrocio fra due piastrelle al centro dell'aula è stato posto lo zero; gli altri incroci sono stati numerati come si vede nel disegno, che rappresenta una porzione dell'aula:



☞ *Modalità dello spostarsi concretamente sulla linea disegnata sul pavimento: vengono sviluppate le metafore dell'**andare avanti**' e dell'**andare indietro** che diventano rispettivamente 'andare avanti di... passi' e 'andare indietro di... passi'.*

Per ragioni che diventeranno chiare fra breve, si propone di negoziare con la classe le seguenti convenzioni per quanto riguarda i movimenti dell'alunno:

- *Qualunque sia la sua posizione sulla linea, si pone sempre nel verso della retta orientata (v-silhouette nel disegno);*
- *All'istruzione 'Vai avanti di tre passi' corrisponde uno spostamento nel verso della retta;*
- *All'istruzione 'Vai indietro di cinque passi' corrisponde uno spostamento nel verso contrario, e il bambino arretra di cinque passi camminando 'a gambero'.*

(a) Si può cominciare (soprattutto con gli alunni più giovani) preparando una scatola con dentro dei bigliettini contenenti delle istruzioni preparate secondo i codici che abbiamo usato sinora 'numero nero indica la posizione', 'numero rosso indica uno spostamento. L'alunno pesca dalla scatola e si comporta di conseguenza spiegando i suoi movimenti.

(a_1) Un alunno si posiziona all'esterno della linea e al suo turno pesca un bigliettino.
Alcuni esempi:

- $\boxed{^{+}5}$ Si posiziona sul numero $^{+}5$. Pesca un bigliettino.
- $\boxed{^{-}2}$ Da $^{+}5$ arretra a gambero di due passi, argomenta sulla posizione che occupa ora, poi detta ad un compagno un primo messaggio per Brioshi che illustra i suoi primi movimenti: $^{+}5+^{-}2=^{+}3$
  Pesca ancora.
- $\boxed{^{+}7}$ Si sposta in avanti di sette passi e organizza una nuova scrittura sotto la precedente: $^{+}5+^{-}2+^{+}7=^{+}10$
  Pesca ancora.
- $\boxed{-1}$ Questo biglietto indica una posizione, e non più uno spostamento. L'alunno si porta nella nuova posizione ($^{-}1$), riflette sul percorso fatto (quanti passi, se in avanti o a gambero), e lo traduce per Brioshi riscrivendo la frase precedente: $^{+}5+^{-}2+^{+}7+^{-}4=^{+}6$

(b) Enrico si trova nella posizione $^{-}4$. Riceve, una dopo l'altra, queste istruzioni e le descrive:

$$^{+}6 \rightarrow {}^{-}4 \rightarrow {}^{-}2 \rightarrow {}^{+}3$$

(b_1) Controlla che la sua nuova posizione è in $^{-}1$.
(b_2) Rappresenta per Brioshi il percorso di Arnold (*risposta:* $^{-}4+^{+}6+^{-}4+^{-}2+^{+}3=^{-}1$)

(c) Alice si trova nella posizione 5. Riceve queste istruzioni. Qual è la sua nuova posizione?

$$^{-}2 \rightarrow {}^{-}3 \rightarrow 0 \rightarrow {}^{-}4 \rightarrow {}^{-}20$$

☞ *La posizione finale $^{-}24$ non compare sulla retta di Arnold. Questo obbliga ad una decontestualizzazione della situazione e ad un passaggio ad un calcolo su un piano più astratto.*

(d) Enrico si trova nella posizione $^{-}6$. Spiega a parole che cosa ci racconta la seguente frase dei suoi movimenti lungo la linea:

$$^{-}6+{}^{-}7={}^{-}13$$

(e) Ilaria si trova nella posizione 4. Riceve le sue istruzioni ma su due di esse è caduta una macchia:

$$^{-}3 \rightarrow \blacksquare \rightarrow {}^{-}6 \rightarrow \blacksquare \rightarrow {}^{+}4$$

La sua nuova posizione è 0.
(e_1) Si può capire comunque il percorso di Ilaria? Argomenta la risposta.

☞ *Risposta: conviene porre i sequenza le istruzioni note, e quindi effettuare gli spostamenti in questo ordine:*

$$+4+{}^{-}3+{}^{-}6+{}^{+}4={}^{-}1$$

Dalla posizione $^{-}1$ si deve raggiungere la posizione finale 0 con due passaggi (le istruzioni mancanti).
Ci sono quindi infinite coppie di spostamenti che portano a 0, ad esempio:

$$^{+}2+{}^{-}1 \qquad {}^{+}3+{}^{-}2 \qquad {}^{-}1+{}^{+}2 \qquad {}^{-}9+{}^{+}10$$

In conclusione: vanno bene tutte le coppie la cui somma algebrica sia +1 (che infatti è l'unico passo che porta dalla posizione $^{-}1$ a 0.

(e_2) *(se gli alunni hanno risposto alla domanda e_1)* Scrivi almeno tre coppie di istruzioni possibili.

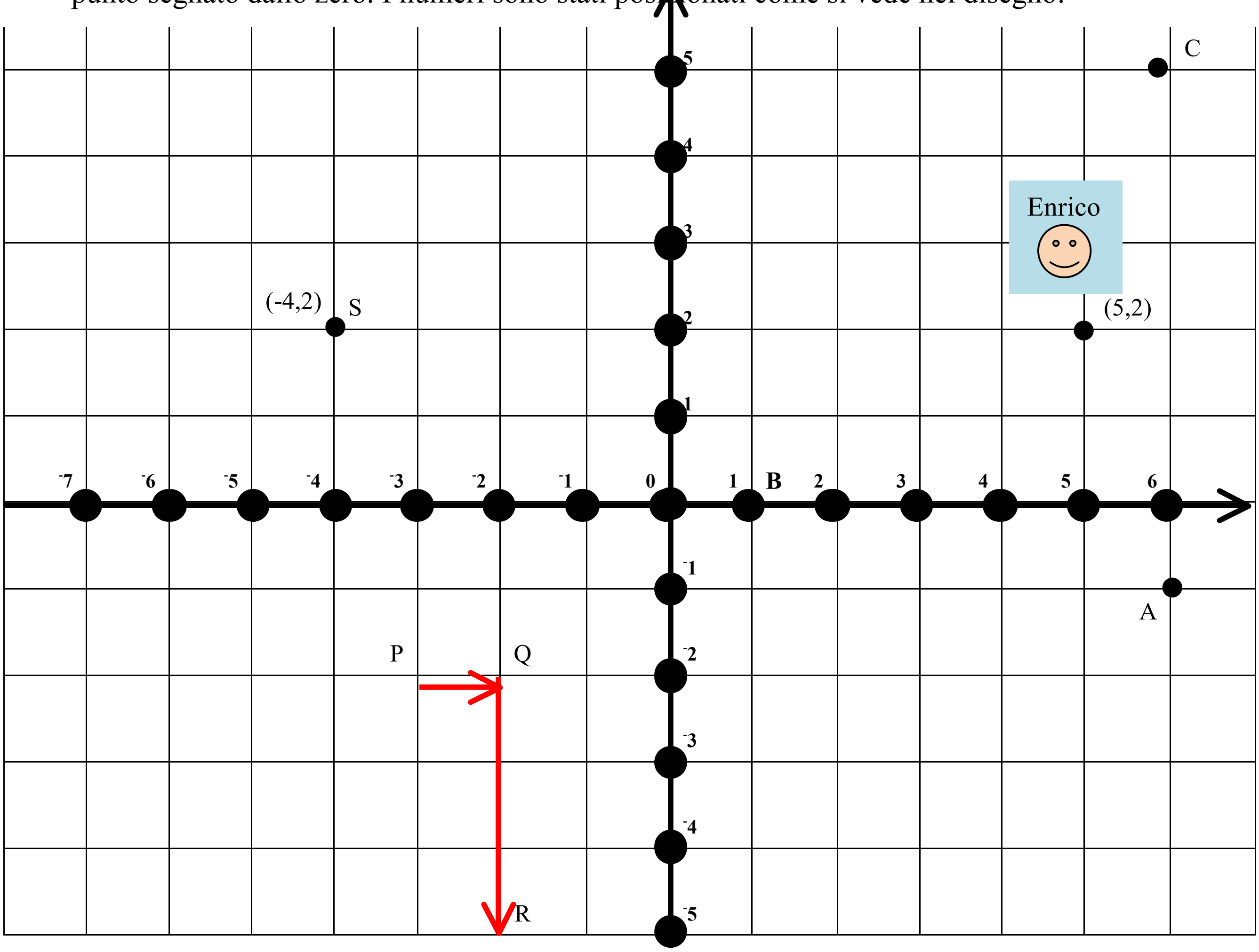
(f) Scrivi un elenco di **cinque** istruzioni consecutive che permettono ad Alessio di spostarsi da $^{-}5$ a $^{+}5$. I numeri devono essere tutti differenti.

Parti da '$^{-}5$'. Le istruzioni sono nell'ordine.
'Vai avanti di 6 passi', 'Vai indietro di 4 passi',
'Vai indietro di 3 passi', 'Vai avanti di 10 passi
e infine 'Vai avanti di 1'.

$$^{-}5+{}^{+}6+{}^{-}4+{}^{-}3+{}^{+}10+{}^{+}1={}^{+}5$$

(g) Alessio ha preso in mano le istruzioni e sta per eseguirle ma gli scivolano di mano e cadono di qua e di là sul pavimento. Alessio le guarda dispiaciuto e si lamenta "E adesso come farò a sapere come devo eseguire le istruzioni?" Marta alza la mano e sorride con aria furba "Dammi i foglietti, te li metto io in ordine!" Prende i foglietti, li mette uno dopo l'altro velocemente sulla cattedra e torna al posto facendo l'occhiolino all'insegnante.
(g_1) Come ha fatto Marta ad essere così veloce? In che ordine ha messo i foglietti? Argomenta la risposta.

5.2. **Per i più grandi**: sul pavimento dell'aula di Enrico è stata costruita un'altra linea dei numeri, perpendicolare alla precedente. L'incrocio fra le due linee avviene in corrispondenza del punto segnato dallo zero. I numeri sono stati posizionati come si vede nel disegno:



*Sinora abbiamo visto la notazione in nero (es: $^-5$) per indicare una **posizione** e in rosso (es: $^+$**11**) per indicare uno **spostamento lineare**.*
*Sul **piano** le due notazioni vengono ora adattate in questo modo: in nero (es: $^-4$,$^+2$) si indicano le coordinate di un punto, cioè la sua posizione; in rosso (es: $^-$**7**,$^-$**4**) uno spostamento. Ad esempio, nel grafico precedente, con ($^-4$,2) si indica la posizione del punto S, mentre lo spostamento indicato dalla freccia nel terzo quadrante significa che un alunno si sposta da P a R con due movimenti che vengono codificati come ($^+$**1**,$^-$**3**), ossia: l'alunno si sposta (nel disegno) di un'unità verso destra ($^+$**1**) e di tre unità verso il basso ($^-$**3**).*
Naturalmente, a seconda dell'età degli alunni, sarebbe opportuno che l'attività con le rappresentazioni fosse preceduta da spostamenti reali su un piano cartesiano costruito sul pavimento, in modo che gli alunni possiedano degli strumenti di mediazione fra i due livelli (v. prossimo commento).
Non va sottovalutata infine la difficoltà che alcuni potrebbero incontrare nel passaggio da una rappresentazione sul pavimento (orizzontale) a quella sulla lavagna o sulla LIM (in verticale) o da uno spazio grande (il pavimento) ad uno piccolo (il quaderno).

☞ *<u>A proposito delle modalità dello spostarsi concretamente sul piano disegnato sul pavimento</u>:*
*Sulla linea abbiamo introdotto le metafore dell'**andare avanti**' e dell'**andare indietro**.*
Sul piano bisogna ampliare queste convenzioni e rinegoziarle con gli alunni.
Immaginiamo l'alunno che si trovi in P $(^-3,^-2)$. Questa volta riceve non un solo biglietto (come nel caso della linea) ma <u>due</u>, contenenti entrambi numeri scritti in rosso (quindi essi indicano degli spostamenti).
→ *La coppia è **ordinata**: come riceve le istruzioni, così deve eseguirle. Ognuna delle istruzioni si riferisce ad un **asse** (si concorderà prima quale sia l'ascissa, e quale l'ordinata); questi termini non vanno usati con gli alunni più giovani, si concorda un'altra terminologia, del tipo 'prima linea', 'seconda linea' o 'linea verso la lavagna', e così via).*
L'alunno riceve questi due biglietti: $\boxed{^+\mathbf{1}}$ $\boxed{^-\mathbf{3}}$

- *si pone in P guardando nel verso del suo primo spostamento (la 'prima linea'), fa un passo in avanti e si sposta in Q;*
- *Siccome il bigliettino contiene un numero negativo, significa che deve camminare 'a gambero' nella direzione della 'seconda linea', quindi*
- *Stando in Q ruota di 90° a sinistra e fa tre passi camminando all'indietro trovandosi così in R.*
- *Rappresenta per Brioshi i suoi spostamenti:* $(^-3,^-2)+(^+\mathbf{1},^-\mathbf{3})=(^-2,^-5)$

Alcune situazioni problematiche:

(a) Enrico si trova nella posizione (5,2).
Riceve queste istruzioni da Brioshi: $(^+\mathbf{2},^-\mathbf{3})$.
In quale punto si trova ora? Argomenta la risposta inserendo anche la risposta per Brioshi.
Es (i riferimenti sono immaginari): "Brioshi dà l'istruzione ad Enrico di spostarsi prima di due passi verso la lavagna e poi di tre passi verso il fondo dell'aula e così arriva nel punto che chiamiamo A. Per far capire a Brioshi dove si trova potremmo scrivergli $A(^+7,^-1)$*".*

(b) Da A Enrico riceve da Brioshi queste nuove istruzioni: $(^-\mathbf{5},^+\mathbf{1})$.
Dove va? Argomenta e comunica a Brioshi la posizione di arrivo.
$B(^+2,0)$.

(c) Enrico ora si trova in B. Quali istruzioni dovrebbe mandargli Brioshi per farlo andare in C? Argomenta la risposta e poi scrivi sia le istruzioni dello spostamento che la posizione di C.
$(^+\mathbf{5},^+\mathbf{5})$ - $C(^+6,^+5)$

(d) Alice si trova nella posizione (-4,2).
Spiega cosa potrebbe significare questa frase:

$$(^-4,2)+(^-\mathbf{5},^+\mathbf{1})=(^-9,3)$$

☞ *La frase che abbiamo appena scritto è certamente 'ibrida' sul piano matematico. Ricordiamo che ora ci stiamo confrontando non con la matematica ma con la didattica della matematica, e stiamo costruendo significati favorendo l'evoluzione del balbettio algebrico. Queste scritture hanno, in questo momento, la funzione di <u>differenziare le posizioni e gli spostamenti</u>. La 'pulizia' del linguaggio verrà introdotta gradualmente, un po' come accade con il passaggio dalla macchia come metafora dell'incognita alla conquista della lettera e dei suoi vari significati (incognita, variabile, parametro).*

6. Le Tessere dei numeri relativi (Indice)

☞ *L'attività che proponiamo ora è stata individuata in internet visitando siti inglesi e americani che trattano l'argomento 'numeri relativi' (**integer numbers**) in classi di scuola primaria (approfittiamo anche di questa occasione per sottolineare come sia difficile trovare materiali didattici significativi – e quindi davvero interessanti - sui numeri relativi per la scuola primaria, anche se i programmi parlano della loro introduzione a questo livello di età.*
Abbiamo fuso tra loro le varie proposte ricostruendo un'ipotesi di percorso, tutto da esplorare e da verificare, modificare, arricchire attraverso le attività sperimentali in classe.

Con le attività precedenti gli alunni sono stati avvicinati ai 'numeri con segno' nella loro doppia veste di posizioni *e di* spostamenti.

Si sono poi presentate delle attività che introducono alle operazioni *con questi numeri, limitandoci sinora all'***addizione**.

L'attività con le tessere potrebbe essere avviata (per un periodo di tempo molto limitato) **per introdurre la sottrazione fra i numeri relativi e guidare poi verso il suo superamento (in algebra si parla solo di 'somma algebrica')**. *Da sola non è naturalmente sufficiente, ma può costituire un interessante supporto semantico. Le sue potenzialità, come si è detto, sono tutte da verificare e da scoprire.*

Un'avvertenza: come tutti i materiali che si manipolano e che si dimostrano efficaci e 'semplici' da gestire, una volta comprese le loro caratteristiche, sono rischiosi perché proprio la loro efficacia rischia di cortocircuitare gli aspetti concettuali soggiacenti, opacizzandoli attraverso una manipolazione esperta, povera di significati espliciti.

Per questo motivo, è importante non solo limitare il loro uso allo stretto necessario, ma è fondamentale continuare con la prassi consueta della verbalizzazione *e dell'*argomentazione. ***Ogni passaggio nella manipolazione va giustificato**. **Ogni manipolazione deve passare attraverso la sua rappresentazione in linguaggio matematico**. Gli alunni devono essere resi consapevoli di questo. Se queste condizioni non si verificano, l'efficacia dello strumento rischia di essere vanificata.*

Un invito: proprio perché è un'attività sperimentale, la sua valutazione dovrebbe essere accompagnata, d'ora in poi, da una ricca serie di testimonianze delle reazioni degli alunni, dei loro atteggiamenti, delle loro difficoltà, dei progressi, insomma di tutto ciò che può permettere una autentica analisi non tanto dell'efficacia in sé dello strumento, quanto delle sue reali ricadute sulle competenze matematiche e linguistiche, e sulla sua capacità di favorire il formarsi di autentiche premesse cognitive allo studio più approfondito dei numeri relativi.

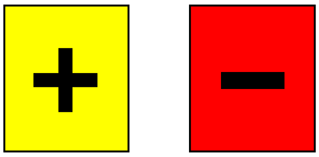
Un suggerimento: è opportuno (forse di più: necessario) che il docente – da solo o con dei colleghi – sperimenti le tessere e il relativo percorso prima di portarlo in classe. La dimestichezza con il suo uso è una condizione decisiva per assicurare validità a questo strumento ricercando un rapporto corretto tra efficacia e ben definiti limiti di tempo.

***Ci attendiamo un'importante collaborazione da parte degli insegnanti che sperimenteranno le tessere: registrazione degli interventi significativi, protocolli scritti autonomamente dagli alunni, fotografie, commenti degli stessi insegnanti, osservazioni, proposte, invenzioni di nuove situazioni problematiche, valutazione sulla 'spendibilità' dello strumento**.*

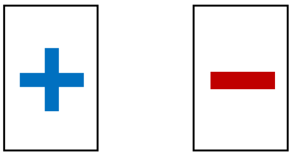
(Indice)

6.1. I materiali (Indice)

Le tessere potrebbero essere di cartoncino. Si potrebbero rendere le tessere meglio identificabili usando cartoncini di colori differenti per le tessere ‘positive’ e per quelle ‘negative’.

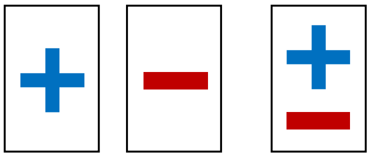


o variando il colore del segno (nel testo che segue adotteremo questa variante):



6.2. La strategia (Indice)

La strategia si basa sull’uso di tre tipi di tessere:



che possono essere raggruppate, combinate e scambiate, così da modellizzare le operazioni aritmetiche di base (addizione e sottrazione). Il loro uso deve essere accompagnato come il solito dalla continua **verbalizzazione** (nel Quaderno questa pratica viene spesso sottolineata attraverso il frequente uso di *ipotetiche frasi degli alunni inserite dentro dei fumetti*).

Cominceremo con le prime due tessere. La terza verrà introdotta in un secondo momento.

Le manipolazioni con le tessere e i loro esiti (carte iniziali, carte aggiunte e tolte) vengono costantemente tradotte in linguaggio matematico.

Come abbiamo già sottolineato, le tessere possono essere una semplice ed efficace alternativa per insegnare le regole delle operazioni con i numeri relativi, sia con il ‘+’ che con il ‘-‘.

Dopo una sufficiente pratica gli alunni scopriranno da soli le regolarità delle addizioni e delle sottrazioni con i numeri relativi. Non è necessario che siano gli insegnanti a far emergere delle ‘regole’. Gli alunni, opportunamente stimolati e guidati, comprenderanno quali sono i significati ‘dietro’ le regole e perché esse hanno quel funzionamento. Questo renderà più stabile la loro memorizzazione quando lavoreranno in modo autonomo.

Per enfatizzare l’importanza della verbalizzazione, presenteremo spesso delle ipotesi di frasi elaborate dalla classe in forma di fumetto.

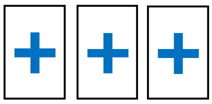
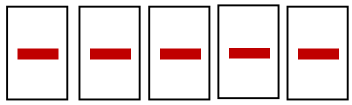
(Indice)

6.3. Rappresentare i numeri relativi con le tessere. Lo zero (Indice)

☞ *I prossimi paragrafi **6.3.1.** e **6.3.2. rivestono carattere fondamentale** per l'attività in quanto preparano le basi per una competenza che verrà utilizzata in quasi tutte le fasi successive (da un certo punto in poi, **in tutte**).*
La competenza riproduce – in chiave manipolativa – le conoscenze riguardanti **lo zero come l'elemento neutro (*o* nullo) dell'addizione**. *L'originalità starà* nell'uso *che verrà fatto, nel corso delle attività, dell'elemento neutro.*

6.3.1. L'insegnante introduce ogni tessera come rappresentazione di '+1' o '-1'

Per esempio:

+3 viene rappresentato con:  e -5 con: 

Poi:

(a) chiede agli alunni come rappresenterebbero differenti numeri relativi usando le tessere,

oppure, al contrario:

(b) compone dei numeri con le tessere e chiede di trascriverli in linguaggio matematico per Brioshi.

☞ *Sarà opportuno che ci sia un kit di classe da distribuire agli alunni, in modo che ognuno abbia un congruo numero di '+' e di '-' con i quali comporre dei numeri. Si può pensare, in prima battuta, a dieci tessere positive e a dieci negative a testa.*

*In questa prima fase la tessera '+' è una metafora iconica dell'***aggiungere***, l'altra del '***togliere***'.*

Per ora la linea dei numeri può rimanere sullo sfondo.

6.3.2. L'insegnante avvia l'approccio allo zero

Propone di rappresentare con le tessere il numero '+1' e poi '-1'.
Sul tavolo ci sono, disposte in modo casuale, due tessere:

Avvia una riflessione sull'insieme delle due tessere: quale potrebbe essere il significato complessivo? Può essere utile ricordare le metafore dell'aggiungere e del togliere. Si potrebbe concludere le riflessioni collettive con una definizione molto importante:

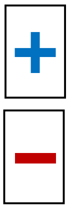
Se si aggiunge 1 e poi si toglie 1 di fatto si rappresenta uno zero.

☞ *Per ora conviene soprassedere sull'inversione dei due segni perché la metafora dell'aggiungere e del togliere non regge se si deve togliere qualcosa che non c'è ancora. Questo aspetto emergerà in un secondo momento.*

Si giunge quindi a dire che:

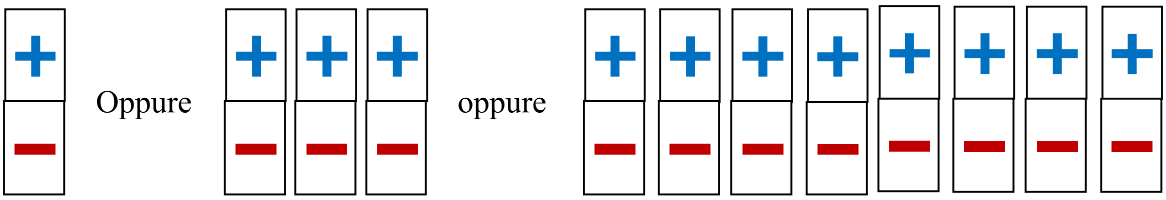
La coppia '±' rappresenta lo zero.

e si propone di disporre le tessere una sopra l'altra in questo modo:



Possiamo chiamare queste due tessere '**coppia-zero**'.
Si farà costruire anche una tessera apposita di dimensioni doppie delle precedenti che verrà chiamata '**tessera nulla**'. Nell'uso può diventare anche la 'tessera Jolly'. Per ragioni che diventeranno comprensibili fra poco, è fatta in modo da poter essere ripiegata a metà rendendo quindi visibile solo la parte positiva o quella negativa.

Si svolgono delle attività per far capire che lo zero può essere rappresentato in modi diversi, per esempio: con una sola tessera nulla, con due, con tre, con un numero qualsiasi di tessere nulle:



Si passa alla rappresentazione in linguaggio matematico; per esempio, in questo caso:

$$0=0+0+0=0+0+0+0+0+0+0+0.$$

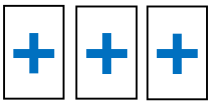
☞ *Si giunge a conquistare l'idea che un numero infinito di coppie-zero è uguale a zero.*

6.3.2. L'uso dello zero

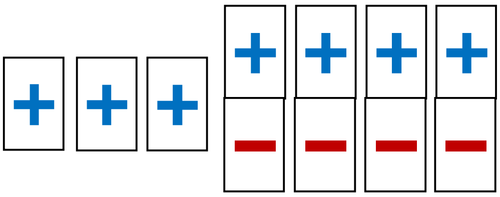
L'insegnante propone questa situazione: per rappresentare il numero +7 si usano sette 'tessere +'; per rappresentare il numero -4 si usano quattro 'tessere –'. Come si potrebbe rappresentare un numero qualsiasi usando un numero di tessere maggiore di quello minimo necessario?

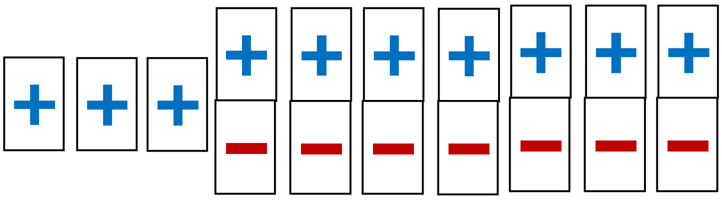
Comincia con questo esempio:

a. Rappresenta (+3) con almeno 7 tessere.
Gli alunni probabilmente non sanno che pesci pigliare. Mettono sul tavolo tre tessere e si fermano:



L'insegnante suggerisce di riflettere sull'esperienza precedente in cui si è conquistata la rappresentazione dello zero. Due soluzioni possibili:





Si perviene attraverso altri esempi ad una definizione del tipo:

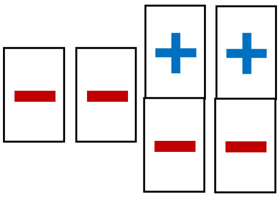
Un numero può essere composto dal relativo numero di tessere e da un qualsiasi numero di tessere nulle.

Si trascrive la situazione precedente in linguaggio matematico:

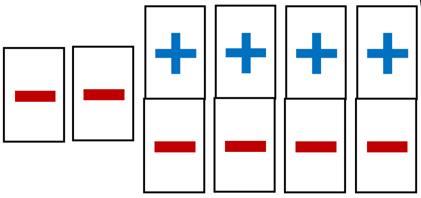
$$+3=+3+0+0+0+0=+3+0+0+0+0+0+0+0$$

L'insegnante fa eseguire degli esercizi di rinforzo:

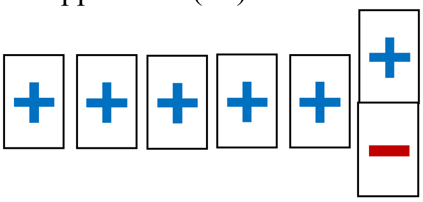
b. Rappresenta (–2) con almeno 4 tessere. Per esempio:



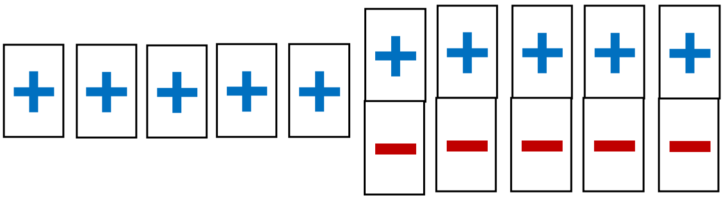
oppure:



c. Rappresenta (+5) con almeno 6 tessere:

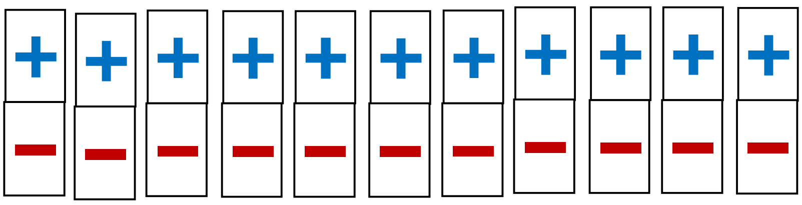


o



ecc

d. Rappresenta (0) con almeno 11 tessere:



ecc.

(Indice)

6.4. Aggiungere tessere ad altre tessere (Indice)

L'attività si sviluppa secondo questa traccia:

(i) L'insegnante dispone su un tavolo due pacchetti di tessere, contenenti o delle tessere '+' o delle tessere '-' con il dorso rivolto verso l'alto in modo che il loro contenuto non sia visibile;
(ii) L'alunno scopre le tessere del primo pacchetto e le pone una accanto all'altra;
(iii) gira il secondo pacchetto e fa la stessa cosa ponendole accanto alle precedenti;
(iv) individua la somma argomentando le eventuali manipolazioni di tessere;
(v) rappresenta in linguaggio aritmetico la situazione finale.

> ☞ *All'inizio l'insegnante comporrà dei pacchetti ad hoc, in modo da raggiungere i risultati che si è prefigurato. Quando lo riterrà opportuno, potrà costruire pacchetti casuali di tessere. Naturalmente ogni pacchetto conterrà tessere di un solo tipo.*

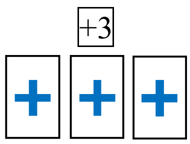
> ☞ *La rappresentazione aritmetica viene generata attraverso il gioco e costituisce* una conquista.

> ☞ *Si può negoziare con gli alunni il passaggio ad una rappresentazione più 'classica' dei numeri relativi, abbandonando l'apice per il segno posizionale e introducendo le parentesi (è quello che si farà d'ora in poi nel Quaderno). Non dovrebbero esserci delle 'resistenze'.*

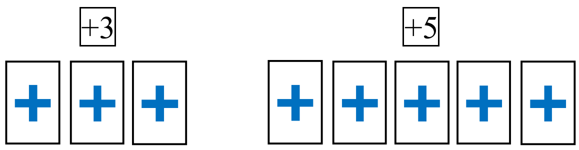
Analizzeremo ora tutti i casi possibili.

6.4.1. Aggiungere positivo a positivo

L'alunno scopre le tessere del primo pacchetto e ne codifica il contenuto su un foglietto che pone sopra di esse:



Scopre il secondo pacchetto, pone le nuove tessere accanto alle precedenti e codifica il loro contenuto come prima:



L'alunno conta le tessere e rappresenta la loro somma sul quaderno:

$$(+3)+(+5)=+8$$

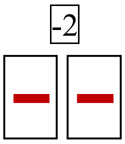
Si fa verbalizzare la conclusione; ad esempio:

Nel primo pacchetto ci sono tre tessere '+'. Nel secondo cinque. In tutto ci sono otto tessere '+'.

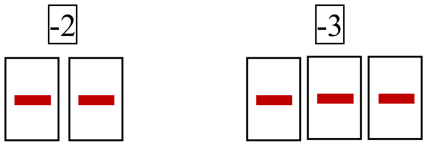
> ☞ *Si verifica sperimentalmente che il processo è lo stesso indipendentemente dal fatto che il numero di tessere del primo pacchetto sia maggiore o minore di quelle del secondo.*

6.4.2. <u>Aggiungere negativo a negativo</u>

L'alunno scopre le tessere del primo pacchetto e ne codifica il contenuto su un foglietto:



Scopre il secondo pacchetto, pone le nuove tessere accanto alle precedenti e codifica il loro contenuto come prima:



L'alunno conta le tessere e rappresenta la loro somma sul quaderno:

$$(-2)+(-3)=-5$$

Si fa verbalizzare la conclusione; ad esempio:

> Nel primo pacchetto ci sono due tessere '-'. Nel secondo tre. In tutto ci sono cinque tessere '-'.

Si svolgono le stesse attività variando i numeri delle tessere nei due pacchetti. Si può quindi pervenire a definizioni di questo tipo (molto dipende dal livello scolare, primaria o secondaria):

> Se nei due pacchetti ci sono tessere '+' la loro somma è un numero positivo.

> Se nei due pacchetti ci sono tessere '-' la loro somma è un numero negativo.

Si può concludere che:

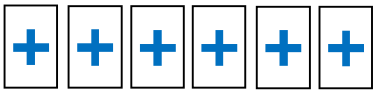
> Se nei due pacchetti ci sono tessere di segno uguale la loro somma ha lo stesso segno delle tessere.

☞ *Anche in questo caso il processo è uguale indipendentemente dal fatto che il numero di tessere del primo pacchetto sia maggiore o minore di quelle del secondo.*

☞ *Da questo momento in poi bisogna incoraggiare gli alunni ad aggiungere tessere opposte incolonnandole per bene.*

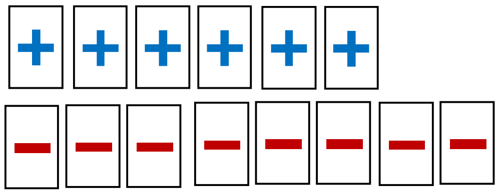
6.4.3. Aggiungere negativo a positivo oppure positivo a negativo

L'alunno scopre le tessere del primo pacchetto e ne codifica il contenuto su un foglietto:



$\boxed{+6}$

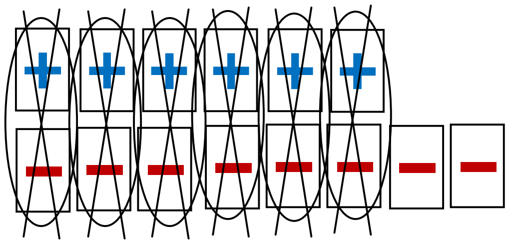
Scopre il secondo pacchetto, pone le nuove tessere in una riga sotto le precedenti e codifica il loro contenuto:



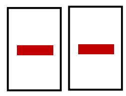
$\boxed{+6}$

$\boxed{-8}$

Viene guidato a riconoscere le coppie-zero e le elimina:



→



☞ *Questa è una fase molto delicata. Per la prima volta, nel suo lavoro con le carte, la classe deve riconoscere nella disposizione delle tessere – si ribadisce l'importanza dell'ordine negli incolonnamenti - delle coppie-zero.*
L'insegnante favorisce il richiamo di questa strategia, sulla quale la classe deve aver lavorato in modo significativo, che assumerà sempre più importanza nel corso dell'attività.

L'alunno conta le tessere rimaste e rappresenta la somma completa sul quaderno:

$$(+6)+(-8)=-2$$

Si svolgono le stesse attività variando i numeri delle tessere nei due pacchetti. Si può quindi pervenire a definizioni di questo tipo (la loro qualità dipende anche dal livello scolare - primaria o secondaria):

Ci sono sei coppie nulle. Siccome posso togliere tutti gli zeri, tolgo le sei coppie e rimangono due tessere 'meno'.

☞ *Si verifica sperimentalmente che ancora una volta il processo è indipendente dal fatto che ci siano prima le tessere '+' o quelle '-' e che il numero di tessere del primo pacchetto sia maggiore o minore del secondo.*

☞ ***Individuare regolarità: alcune questioni riassuntive***

• *Che tipo di situazione ottieni quando aggiungi tessere positive a tessere positive?*
  • *È sempre vero?*
  Risposta: È sempre vero.
  Quando si aggiungono tessere positive a tessere positive il risultato è positivo, ed è uguale alla somma delle tessere dei due pacchetti.

• *Che tipo di risposta ottieni quando aggiungi tessere negative a tessere negative?*
  • *È sempre vero?*
  Risposta: È sempre vero.
  Quando si aggiungono tessere negative a tessere negative il risultato è sempre negativo, ed è uguale alla somma delle tessere dei due pacchetti.

• *Che tipo di risposta ottieni quando aggiungi tessere positive a tessere negative?*
  • *È sempre vero?*
  • *Come fai a capire se la risposta è positiva o negativa?*
  Risposta: Dipende ogni volta dai due numeri.
  Quando si aggiungono tessere positive a tessere negative, o viceversa, il segno del risultato dipende dai numeri delle tessere ed è uguale a quello del numero più grande.
  Il numero del risultato è la differenza fra i numeri delle tessere.

Si cerca sempre di raggiungere delle definizioni generali *esprimibili in linguaggio naturale.*

☞ *Nel commento precedente, quando si parla di 'numero del risultato' si suppone di trovarsi in una fase molto dinamica dello sviluppo del balbettio algebrico in cui il linguaggio sia ancora spurio.*
Al momento che l'insegnante riterrà opportuno, introdurrà il concetto di valore assoluto *del numero relativo per indicare 'il numero senza considerare il suo segno'.*

6.5. Togliere tessere da altre tessere: l'opposto (Indice)

Sinora abbiamo preso in considerazione l'aggiungere tessere. Ora cominceremo a **toglierne**. Introduciamo questa fase con alcune considerazioni.

Come abbiamo visto nelle fasi di questo Quaderno che precedono l'attività con le tessere, nella didattica dei numeri relativi ci si appoggia ancora alla linea dei numeri (v. par **5.**) e alle metafore del 'camminare in avanti' quando ci si riferisce ad un numero positivo e del 'camminare all'indietro' quando ci si riferisce ad un numero negativo. In questi casi i segni predicativi hanno quindi definito rappresentazioni di spostamenti e i segni operazionali usati **sono stati solo dei '+'**. Anche con le tessere, sinora ne abbiamo solo **aggiunte**.

Da questo momento le tessere costituiranno invece un supporto (provvisorio, molto provvisorio, e costantemente accompagnato dalla verbalizzazione) **verso il togliere**, e quindi verso la riflessione sull'operazione di **sottrazione** e le importanti novità che le accompagneranno (questa operazione, lentamente, finirà per essere 'assorbita' dall'addizione).

Negli Appunti iniziali abbiamo scritto "I bambini di solito non capiscono dall'oggi al domani il concetto di *negatività*. Tuttavia, sarà proprio l'esperienza con una vasta gamma di situazioni favorevoli, molto diluita nel tempo, che consentirà loro di costruire le connessioni necessarie per la costruzione di conoscenze di base forti di questo concetto. Gli alunni dovrebbero essere incoraggiati a pensare a *loro* esempi di negatività. Ad esempio vanno esplorati concetti come avanti e indietro, su e giù, dare e prendere, caldo e freddo".

È giunto il momento di riprendere questi concetti e far riflettere la classe sulla **negatività**, in modo da far emergere da ogni coppia (avanti/indietro, su/giù, alto/basso, aggiungere/togliere, ecc) il fondamentale concetto di **opposto**.

Nelle esperienze fatte sinora sulla linea dei numeri, abbiamo visto che l'alunno che si trovava, per esempio, in '$^-7$', e pescava l'istruzione '$^+\mathbf{5}$' avanzava di cinque passi giungendo in '$^-2$'. Se pescava l'istruzione '$^-\mathbf{5}$' arretrava invece di cinque passi 'a gambero' giungendo in '$^-12$'. In questi due casi le rappresentazioni per Brioshi sarebbero state rispettivamente:

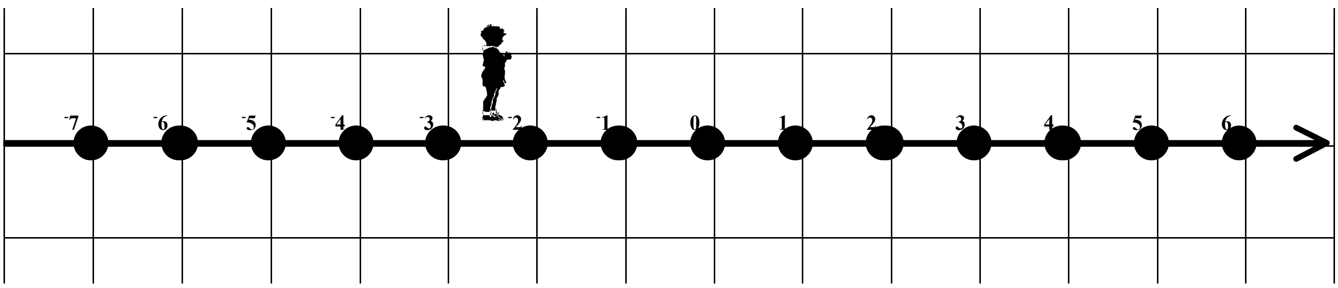
$$^-7+{}^+\mathbf{5}={}^-2 \qquad \text{e} \qquad {}^-7+{}^-\mathbf{5}={}^-12$$

e le istruzioni avrebbero rispettato il principio dell'**aggiungere**.

Quando si ritornerà alla linea dei numeri dopo le prossime attività centrate sul **togliere**, l'attività si modificherà. L'alunno non avrà più solo una sola scatola con le istruzioni, ma dovrà pescare da una seconda scatola, che conterrà, oltre al familiare '+', anche il segno '-'. Anticipiamo questa attività attraverso con un esempio.

Supponiamo che l'alunno si trovi in $^-2$. Pesca dalla 'scatola dei segni un $\boxed{.\ -\ .}$ e dall'altra $\boxed{^-\mathbf{5}}$. Se avesse pescato un '+' andrebbe indietro di cinque passi, ma il '-' che ha pescato gli dice di fare **l'opposto**, cioè di **andare in avanti** di cinque passi. La traduzione in linguaggio matematico sarebbe (al solito i numeri neri indicano le posizioni e quelli in rosso gli spostamenti):

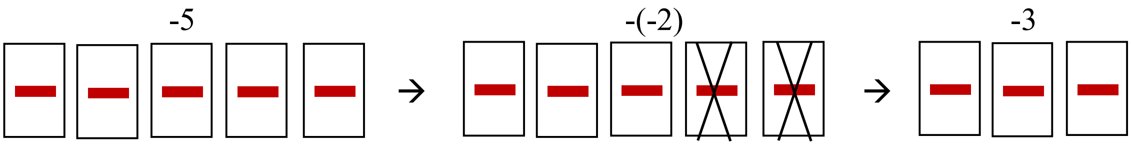
$$-2-{}^-\mathbf{5}={}^+3 \qquad \text{oppure, dopo il gioco con le carte} \qquad (-2)-(-5)=+3$$



Fare l'opposto di camminare in avanti – cioè 'camminare all'indietro' – permette così di introdurre concretamente, per esempio, il concetto – che verrà incontrato intuitivamente giocando con le carte, e che verrà sviluppato in seguito a livello matematico - che **sottrarre un numero negativo equivale ad aggiungerne uno positivo**. Per favorire questa progressione si continueranno ad usare – sempre <u>provvisoriamente</u> - le tessere.

L'**opposto**, con le tessere, si abbina all'idea del **togliere** anziché dell''andare indietro' (come avviene sulla linea dei numeri). Insegnare a dire (e a pensare) la parola 'togliere' di fronte ad un segno di sottrazione è una strategia efficace che aiuta a lavorare con i numeri negativi mediante le tessere.

Per esempio: -5-(-2)=-3



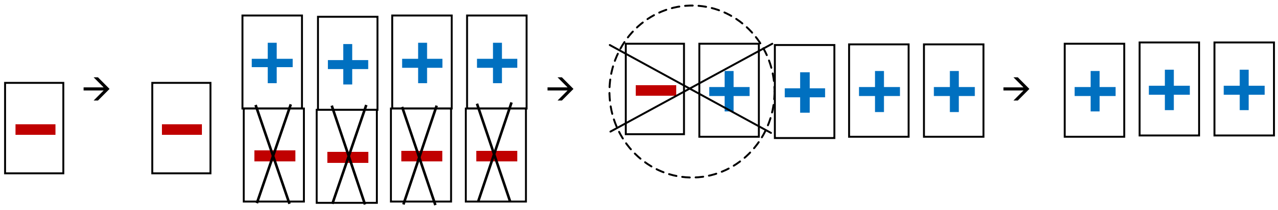
La frase "Da 5 tessere negative **togli** due tessere negative" descrive sia i valori ('-5' e '-2') che l'operazione (la sottrazione). È importante sottolineare la parola '**togli**'. Gli studenti familiarizzeranno con problemi a questo livello prima di incontrare <u>quelli in cui il primo numero dell'equazione sia tale da non consentire di togliere un altro numero di Tessere</u>.

Anticipiamo un altro esempio (questa tipologia verrà affrontata in **6.6.5.**):

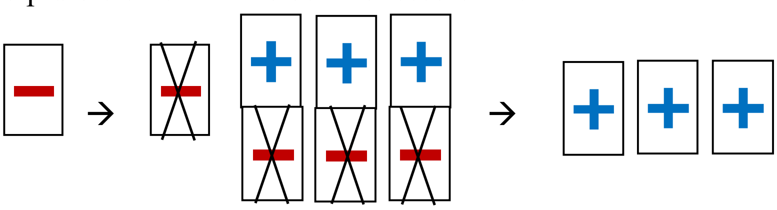
-1-(-4)=+3

Non è possibile 'togliere' quattro tessere negative da una sola tessera negativa. **Gli alunni devono imparare a modellizzare il numero -1 in modo che ci siano quattro tessere negative da togliere**. Diventano determinanti le **<u>tessere nulle</u>**. Si possono ipotizzare almeno due percorsi:

(a) (strategia inizialmente forse più spontanea, meno ragionata): l'alunno appoggia sul tavolo una tessera '-' e poi quattro tessere nulle; ripiega le parti negative delle tessere nulle in modo che non siano più visibili (come se le togliesse); riconosce che una tessera '-' e una '+' formano una nuova coppia-zero e le toglie. Rimane con tre tessere '+'.



(b) (strategia inizialmente forse meno spontanea, più ragionata): l'alunno appoggia sul tavolo una tessera '-' e poi <u>tre</u> tessere nulle; toglie la tessera '-' e ripiega le parti negative delle tessere nulle in modo che non siano più visibili. Rimane con tre tessere '+'.



☞ *Nel caso (b) il '-1' è stato modellizzato utilizzando <u>tre</u> tessere nulle (perché c'era già un '-' da togliere). Anche se un alunno aggiunge 10 o 20 tessere nulle, la situazione non cambia. Alunni ancora non del tutto esperti potrebbero utilizzare più tessere nulle del necessario (come nel caso (a)). È nel cercare di capire quante tessere nulle sono di volta in volta davvero necessarie (e sufficienti) che essi possono giungere ad una reale comprensione dell'operazione.*

L'attività è più complessa rispetto a quella in cui bisognava addizionare le carte dei due pacchetti. Si sviluppa secondo questa traccia:
L'insegnante dispone sul tavolo le carte separate per tipo: '+', '-', '± (nulle)'.

(i) propone una scrittura matematica di riferimento;
(ii) un alunno rappresenta con le tessere il primo termine;
(iii) a seconda di com'è il secondo termine elabora una strategia e la argomenta;
(iv) rappresenta in linguaggio aritmetico la situazione finale.

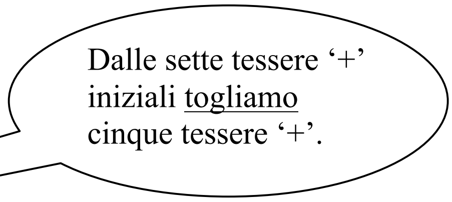
Simuliamo alcuni momenti dell'attività ponendo in evidenza i vari casi possibili.

☞ *Come abbiamo detto, l'insegnante può suggerire di rappresentare la scrittura originale utilizzando per il segno operazionale '-' la metafora del 'togliere'.*

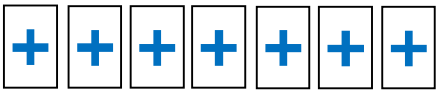
6.5.1. Togliere positivo da positivo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)

L'insegnante propone la scrittura:

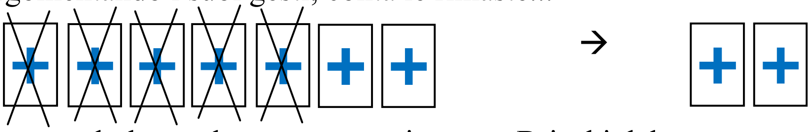
(+7)-(+5)



L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:



Autonomamente, o su suggerimento dei compagni o dell'insegnante, toglie cinque tessere argomentando i suoi gesti; conta le rimaste...



... e conclude con la rappresentazione per Brioshi del processo completo:

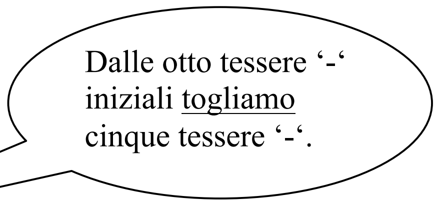
(+7)-(+5)=+2

☞ *Se qualche alunno, dopo aver posto davanti a sé le tessere '+' iniziali, incerto sul da farsi, cortocircuita il segno di sottrazione e riproduce le modalità dell'addizione, come se fosse scritto* (+7)+(+5)*, si può far riflettere su significato dato al '+' di 'aggiungere' e al '-' di 'togliere'.*

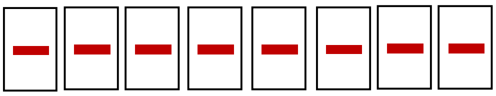
6.5.2. Togliere negativo da negativo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)

L'insegnante propone la scrittura:

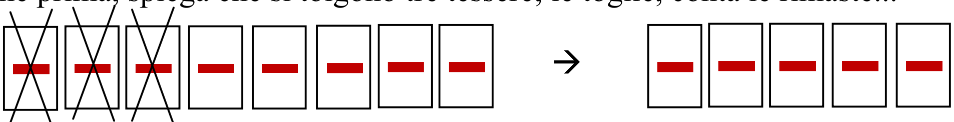
(-8)-(-3)



L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:



Come prima, spiega che si tolgono tre tessere; le toglie, conta le rimaste...



e conclude con la rappresentazione per Brioshi del processo completo:

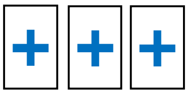
(–8)-(-3)=-5

6.5.3. <u>Togliere positivo da positivo (valore assoluto del primo numero **minore** del secondo)</u>

L'insegnante propone la scrittura:

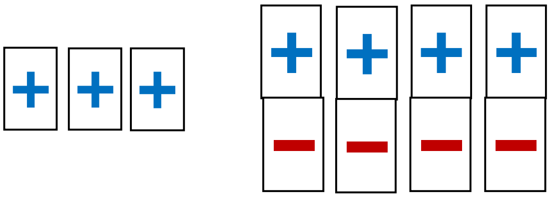
(+3)-(+7)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:



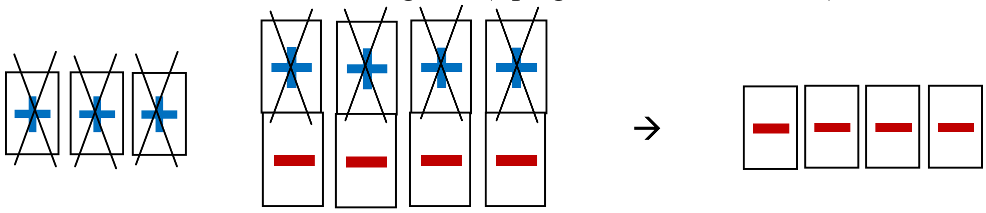
☞ *Di fronte alle probabili incertezze della classe* ("Non si possono togliere <u>sette</u> tessere '+' da <u>tre</u> '+'" *si riprende la conclusione del lavoro con le tessere nulle: "Un numero qualsiasi può essere composto dal relativo numero di tessere e da un qualsiasi numero di tessere nulle".*

L'alunno aggiunge quattro tessere nulle...



Aggiungo quattro tessere nulle, <u>tolgo</u> le prime tre, piego le altre in modo da nascondere i '+' e restano quattro tessere '-'.

... e così si ritrova i sette '+' da togliere (ripiegando le tessere nulle), rimanendo con soli quattro '-':



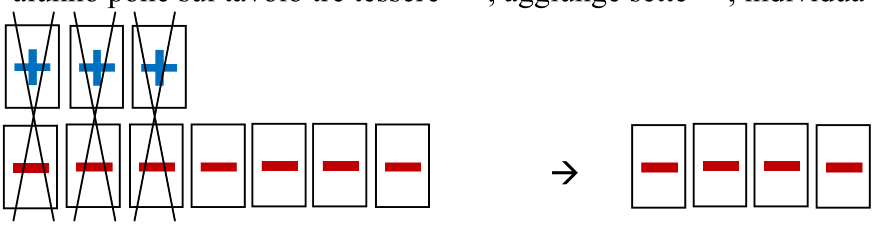
Completa la scrittura iniziale:

(+3)-(+7)=-4

La conclusione ha un sapore 'magico': da due numeri positivi si ottiene un numero negativo!
L'insegnante propone allora una nuova situazione simile a quella iniziale (e già incontrata in **6.5.3.**):

(+3)<u>+(</u>-7)

L'alunno pone sul tavolo tre tessere '+', aggiunge sette '-', individua tre coppie-zero e le toglie:



Trascrive per Brioshi:

(+3)+(-7)=-4

<u>Togliere</u> un numero **positivo** equivale ad <u>aggiungere</u> un numero **negativo**

A questo punto si pongono a confronto le due scritture:

(+3)-(+7)=-4 (+3)+(-7)=-4

La discussione collettiva porta all'inattesa conclusione:

(+3)-(+7)=(+3)+(-7)

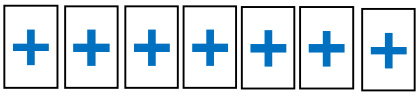
che viene verbalizzata in una forma di questo tipo (si può 'azzardare' una definizione generale):

6.5.4. Togliere negativo da positivo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)

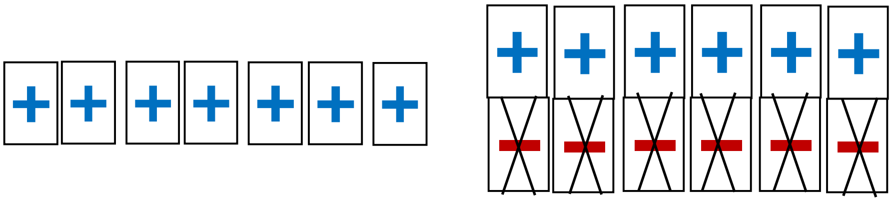
L'insegnante propone la scrittura:

(+7)-(-6)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:

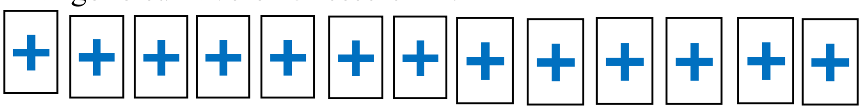


Non può togliere sei tessere '-' da sette tessere '+'. Aggiunge quindi sei tessere nulle e – argomentando - le ripiega in modo da nascondere le parti negative:



Devo aggiungere sei tessere nulle, le piego in modo da nascondere i '-' (è come se li togliessi) e restano tredici tessere '+'.

Rimangono sul tavolo 13 tessere '+':



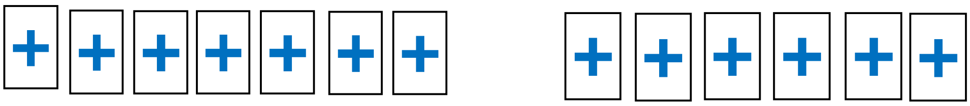
Completa la scrittura iniziale:

(+7)-(-6)=+13

L'insegnante propone un'altra scrittura (v. **6.5.1.**):

(+7)+(+6)

L'alunno (presumibilmente in modo veloce) pone sul tavolo sette tessere '+', un po' più a destra altre sei tessere '+' e conta nuovamente 13 tessere:



Trascrive per Brioshi:

(+7)+(+6)=+13

A questo punto si pongono a confronto le due scritture:

(+7)-(-6)=+13 (+7)+(+6)=+13

La discussione collettiva porta alla conclusione:

(+7)-(-6)=(+7)+(+6)

che viene verbalizzata in una forma generale:

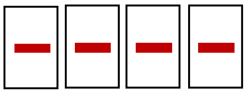
Togliere un numero **negativo** equivale ad aggiungere un numero **positivo**

6.5.5. Togliere negativo da negativo (valore assoluto del primo numero **minore** del secondo)

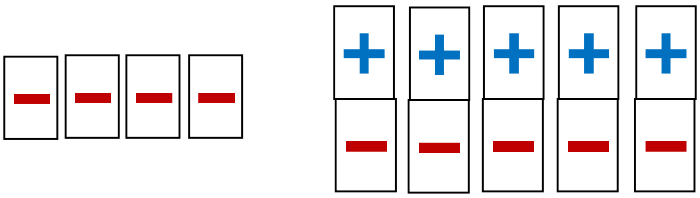
L'insegnante propone la scrittura:

(-4)-(-9)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:

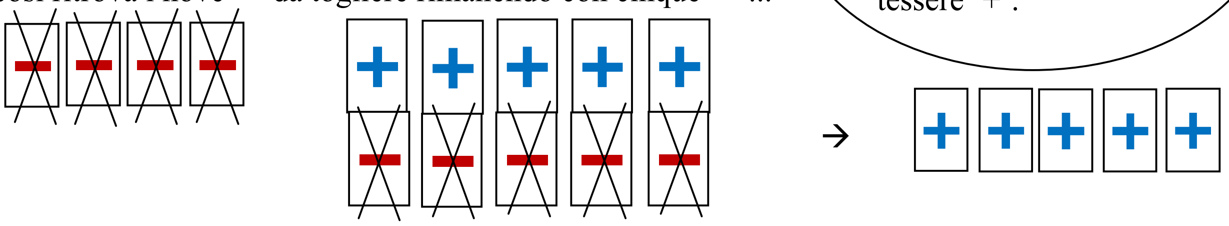


Come prima, non può togliere nove tessere '-' da quattro tessere '-'. Ne può togliere solo quattro. Gliene servono altre cinque, e quindi aggiunge cinque tessere nulle...



Aggiungo cinque tessere nulle, tolgo i quattro '-', le piego in modo da nascondere i '-' e restano cinque tessere '+'.

e così ritrova i nove '-' da togliere rimanendo con cinque '+'...



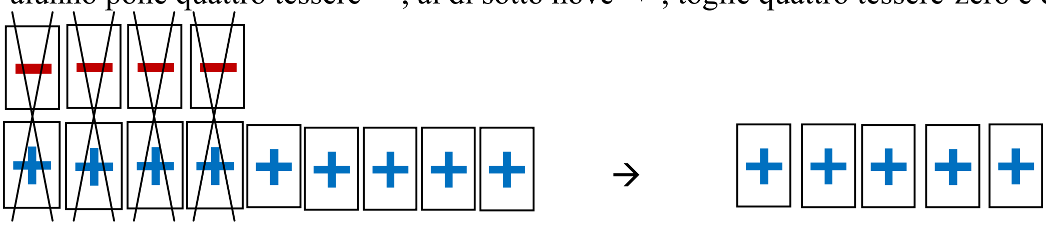
... e completa per Brioshi la scrittura iniziale:

(-4)-(-9)=+5

La conclusione stupisce ancora una volta: da due numeri negativi si ottiene un numero positivo!
L'insegnante propone un'altra scrittura (v. **6.5.3.**):

(-4)+(+9)

L'alunno pone quattro tessere '-', al di sotto nove '+', toglie quattro tessere-zero e conta le restanti:



Trascrive la conclusione per Brioshi:

(-4)+(+9)=+5

Anche in questo caso si pongono a confronto le due scritture:

(-4)-(-9)=+5 (-4)+(+9)=+5

La discussione collettiva porta alla conclusione:

(-4)-(-9)=(-4)+(+9)

Si trova la conferma di una 'regola' già espressa in forma generale (v. **6.6.4.**):

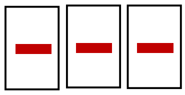
Togliere un numero **negativo** equivale ad aggiungere un numero **positivo.**

6.5.6. Togliere positivo da negativo (valore assoluto del primo numero **minore** del secondo)

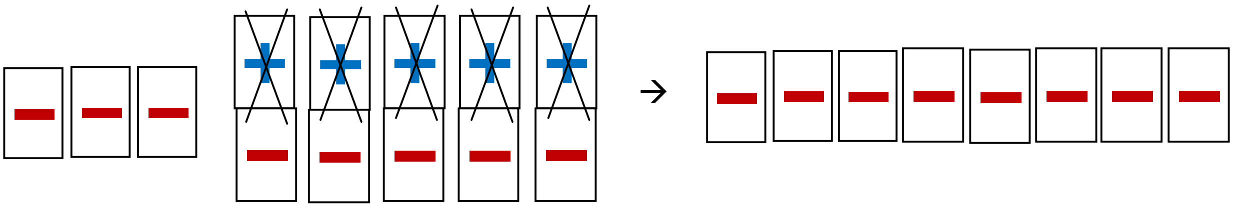
L'insegnante propone la scrittura:

(-3)-(+5)

L'alunno rappresenta il primo fattore:



Per poter disporre di cinque tessere '+' pone accanto ad esse cinque tessere nulle, ripiega le parti '+' e conta le rimanenti:



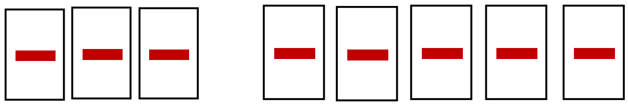
Trascrive in linguaggio matematico:

(-3)-(+5)=-8

Anche in questo caso si propone la situazione iniziale modificata:

(-3)+(-5)=-8

L'alunno ricostruisce la situazione (più semplice della precedente) con le carte:



e trascrive il processo in linguaggio matematico:

(-3)+(-5)=-8

Confronta le scritture:

(-3)-(+5)=-8 (-3)+(-5)=-8

e ricava ancora una volta la conclusione:

(-3)-(+5)=(-3)+(-5)

Si formula collettivamente la 'regola':

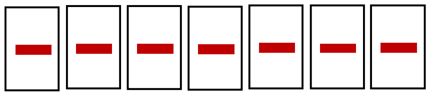
Togliere un numero **positivo** equivale ad aggiungere un numero **negativo**.

6.5.7. <u>Togliere positivo da negativo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)</u>

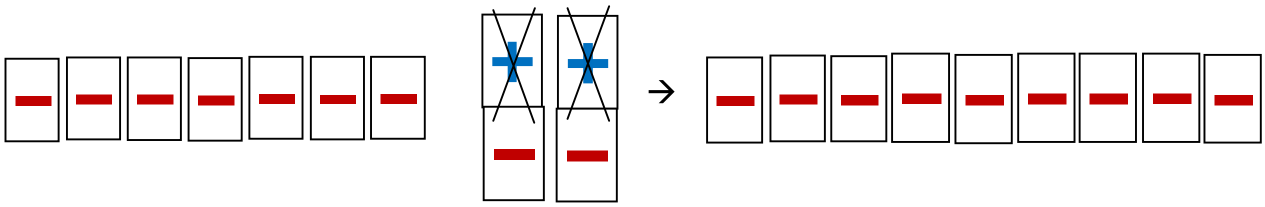
L'insegnante propone la scrittura:

(-7)-(+2)

L'alunno rappresenta il primo fattore:



Per poter disporre di due tessere '+' pone accanto ad esse due tessere nulle, ripiega le parti '-' e conta le rimanenti:



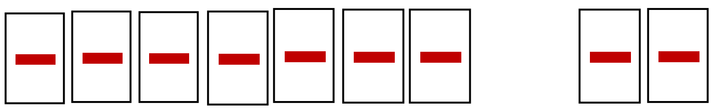
Trascrive in linguaggio matematico:

(-7)-(+2)=-9

Si propone la situazione iniziale modificata:

(-7)+(-2)

L'alunno ricostruisce la situazione (più semplice della precedente) con le carte:



e trascrive il processo in linguaggio matematico:

(-7)+(-2)=-9

Confronta le scritture:

(-7)-(+2)=-9 (-7)+(-2)=-9

e ricava ancora una volta la conclusione:

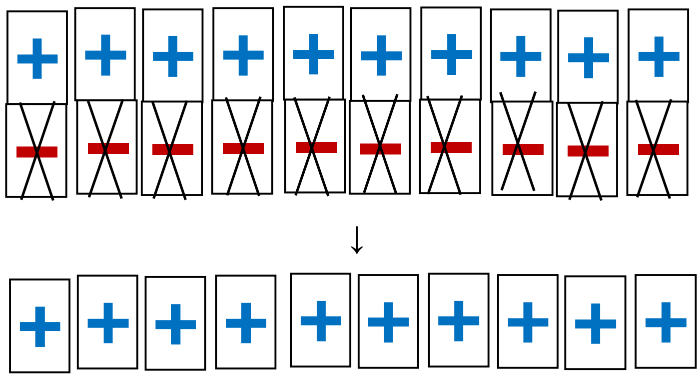
(-7)-(+2)=(-7)+(-2)

Si trova la conferma di una 'regola' già espressa in forma generale (v. **6.6.6.**):

> <u>Togliere</u> un numero **positivo** equivale
> ad <u>aggiungere</u> un numero **negativo**.

6.5.8. Togliere un numero (positivo o negativo) dallo zero

0-(-10)



0-(-10)=+10

Si pone facilmente in evidenza cosa succede se si tolgono (cioè si piegano) i dieci ‘+’ dalle tessere nulle:

0-(+10)=-10

Questioni da sollevare in corso d’opera.

☞ ***Individuare regolarità:***

Questioni per gli alunni su che tipo di regolarità individuano:
• Cosa succede al numero originale quando togli un numero positivo?
o Diventa più piccolo o più grande?
• Cosa succede al numero originale quando togli un numero negativo?
o Diventa più piccolo o più grande?
• Cosa succede al primo numero?
o Cambia?

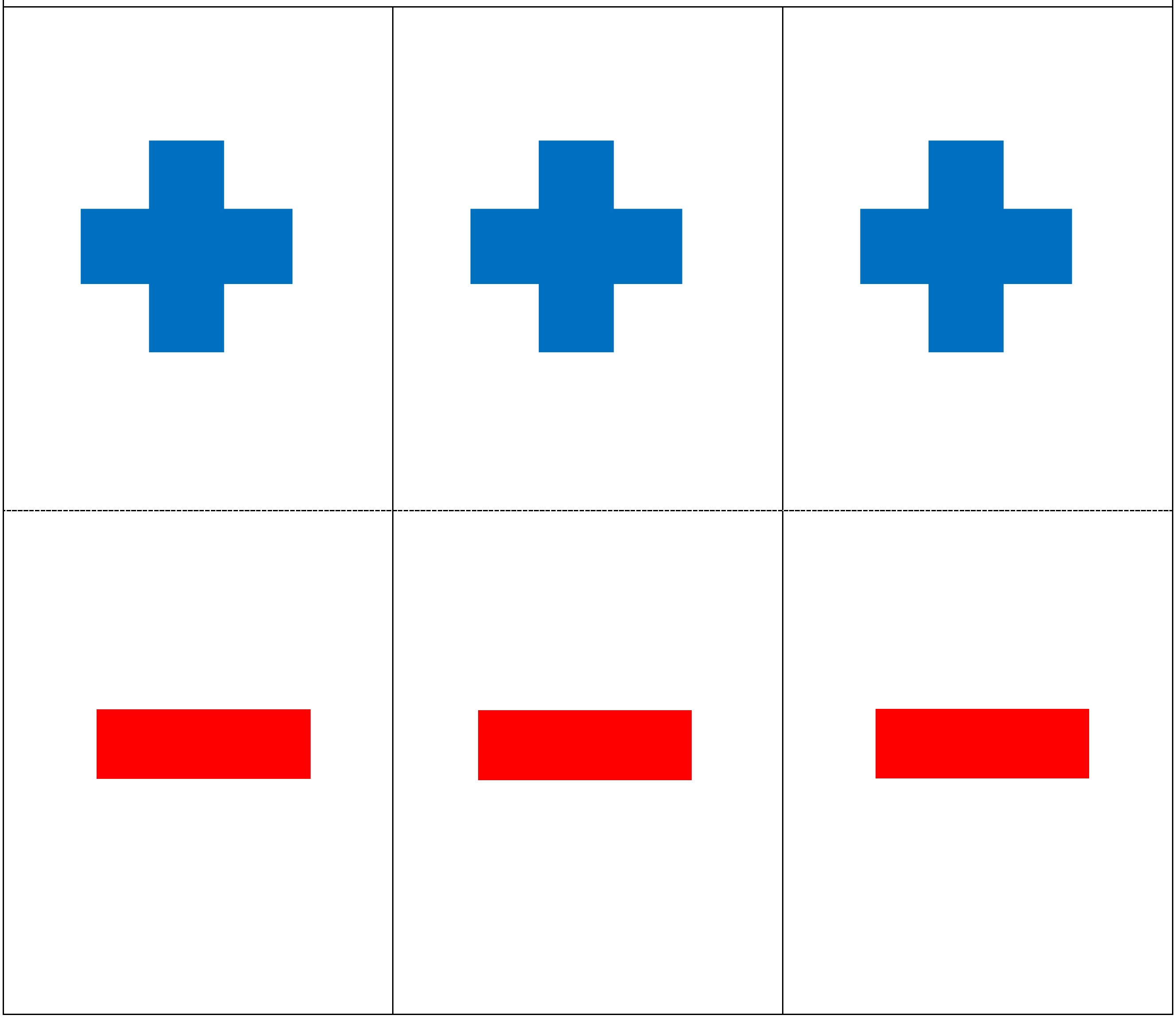
☞ ***Altre attività e suggerimenti:***

• Proponete una rappresentazione iconica di una situazione costruita con le tessere e chiedete di identificare l'equazione associata.
• Chiedete di modellizzare in tre diversi modi i numeri -5, 3, e 0 utilizzando le tessere.
• Date agli studenti delle equazioni con numeri grandi in modo che essi, riconoscendo quanto sia ‘ingombrante’ il modello delle tessere, comincino a risolvere i problemi creando propri algoritmi o ‘regole’ per accelerare il processo. In questo modo, potranno realizzare, almeno ad un livello intuitivo, perché si può semplicemente sottrarre 46,2 da 234,5 e mettere un segno negativo sulla risposta per risolvere il problema 46,2+(-234,5).

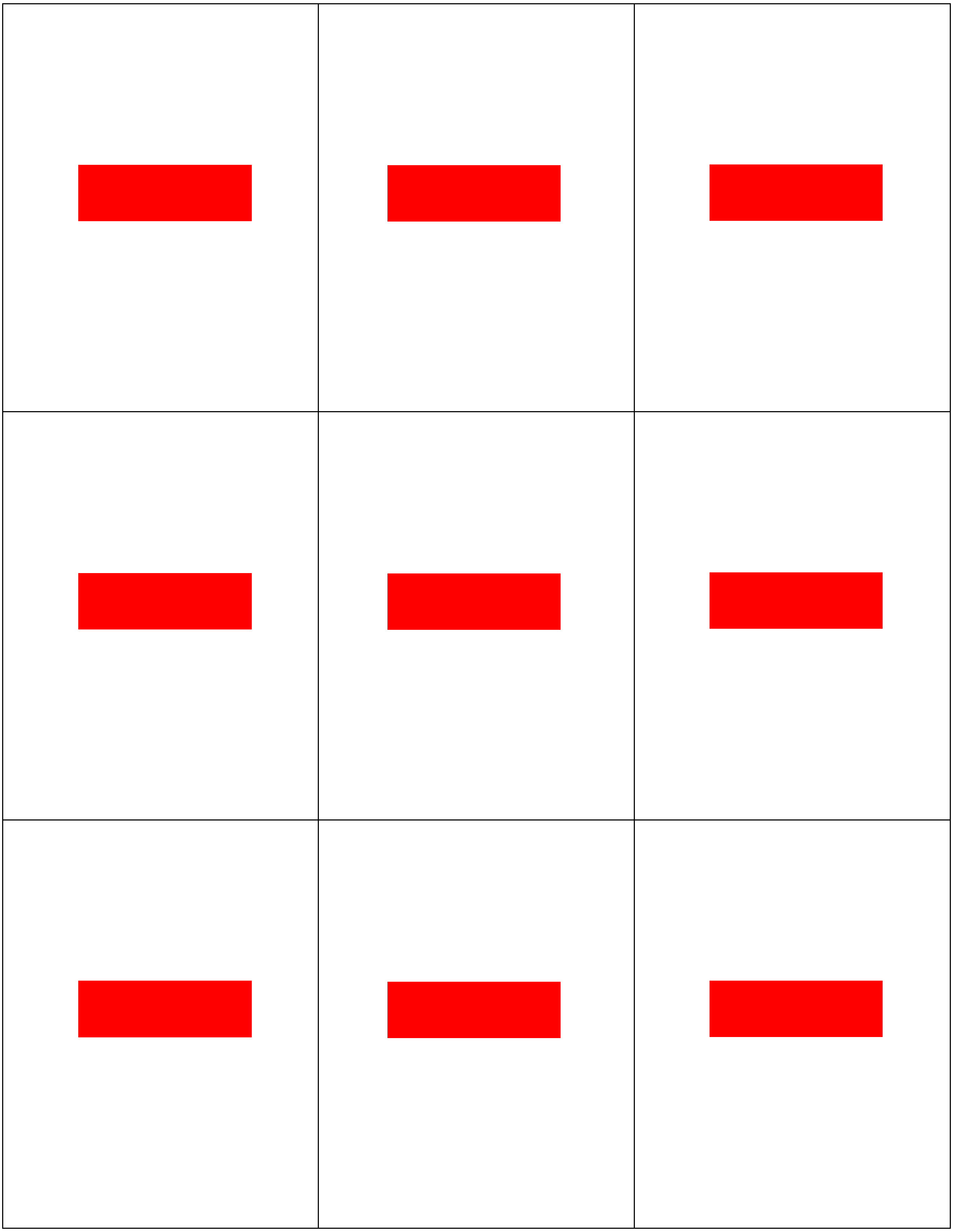
Indice

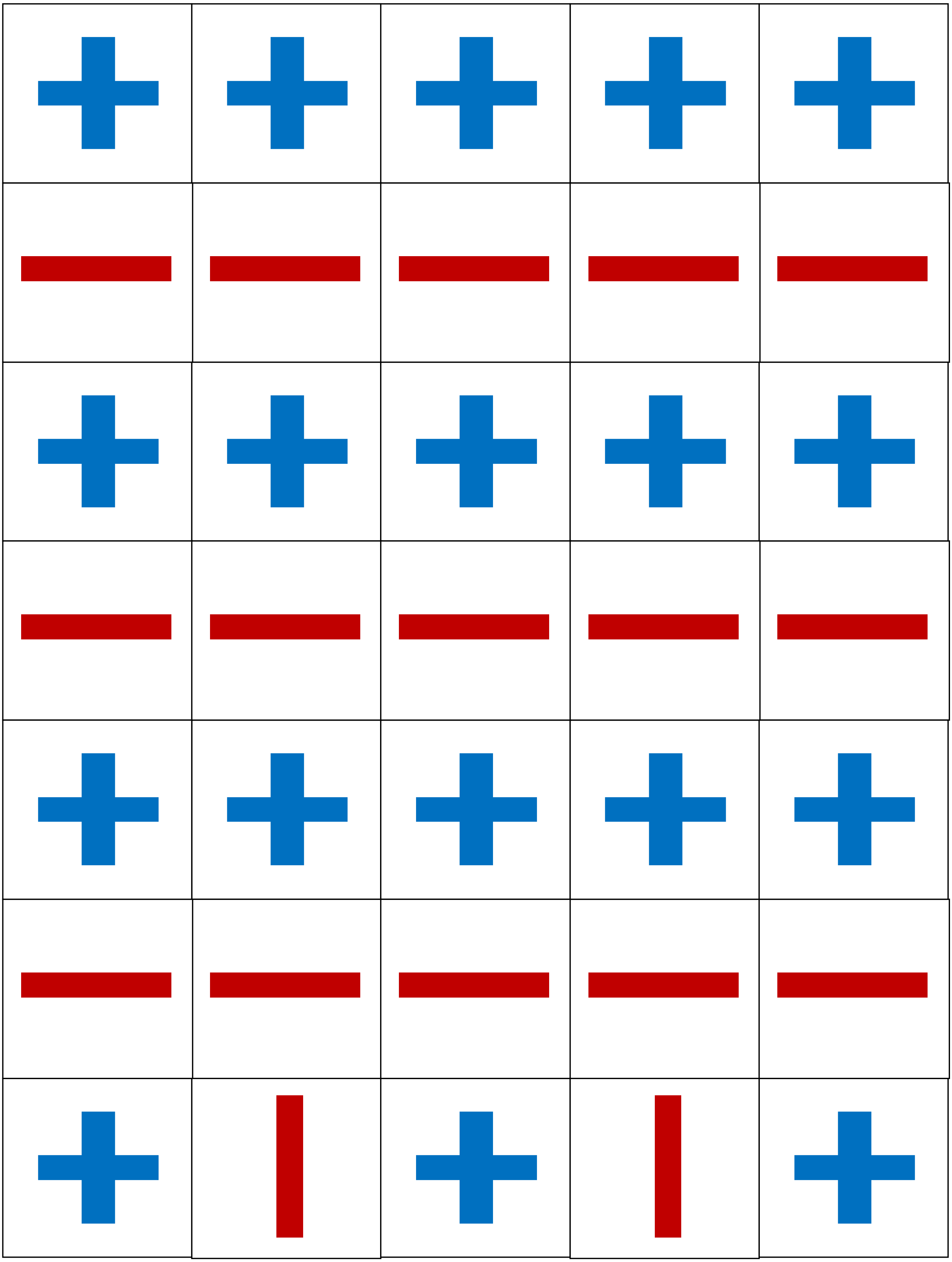
7. Tessere da ritagliare (Indice)

- Le tessere in queste pagine possono essere stampate (meglio se su cartoncino) e utilizzate in classe.
- Se si ritiene di stamparle in bianco e nero conviene almeno usare cartoncini di colore differente per le positive e le negative.
- Per ottenere del materiale duraturo o usabile da più classi le tessere possono essere plastificate.
- Le tre tessere nulle in questa pagina, una volta stampate su cartoncino, vanno 'scocciate' sul retro in modo da poter essere ripiegate a metà lungo le linee tratteggiate.
- Naturalmente, se non si hanno a disposizione stampanti, cartoncini o plastificatori, si può far costruire agli stessi alunni tessere più semplici, anche se meno 'belle' e meno resistenti.
- Si sottolinea che, in ogni caso, l'uso delle tessere è momentaneo e va superato non appena l'insegnante non ne riconosca più l'opportunità.



+	+	+
+	+	+
+	+	+





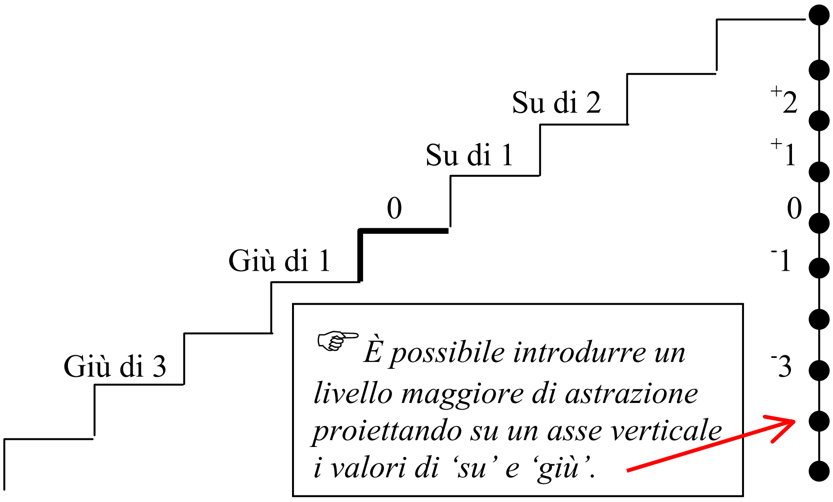
+	+	+	+
−	−	−	−
+	+	+	+
−	−	−	−

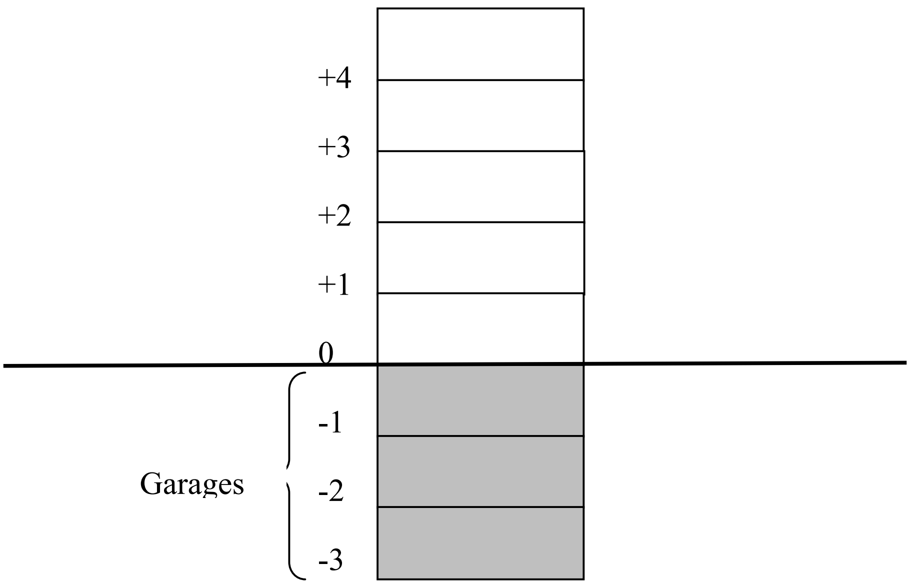
☞ *Gli elenchi delle competenze in uscita delle prossime tre sezioni sono del tutto parziali, e contengono alcuni suggerimenti collegati con le attività svolte nel Quaderno. La sperimentazione nelle classi condurrà a precisazioni più puntuali.*

A. Competenze in uscita alla fine della quarta primaria (Indice)

Un alunno dovrebbe sapere, per esempio:

1. Usare, interpretare e scrivere in un opportuno contesto i concetti di: numero intero, positivo, negativo, meno, sopra o sotto lo zero, …
2. Riconoscere numeri interi positivi e negativi in contesti come: i gradini di una scala, sopra il suolo e sotto il suolo in un edificio, la scala delle temperature, il meteo grafico, … (la competenza può essere stata costruita anche attraverso la metafora del 'su'/'giù').





☞ *Tutte le prossime questioni si concludono con delle domande. Si ribadisce che ogni risposta va argomentata, e che l'insegnante non deve accontentarsi di risposte approssimative, linguisticamente povere, monosillabiche, prive di una struttura basata su soggetto e predicati vari, ecc.*

3. Usare i numeri negativi nel contesto delle temperature. Per esempio

   3.1 Che temperatura mostra il termometro?

   3.2 Quale temperatura è più bassa fra -4° e -2°?

   3.3 Ordinare queste temperature in senso crescente (dalla più bassa alla più alta, partendo dalla più bassa, …)

   2° -8° -1° -6° -4°

4. Saper risolvere problemi simili a questo (naturalmente variando l'ambientazione e in ogni caso concordando con la classe che i riferimenti siano credibili, del tipo: a ferragosto normalmente fa molto caldo, su un ghiacciaio in pieno inverno di notte fa molto freddo e così via. Se lo si ritiene opportuno si può fare riferimento a deserti, uno dei poli, e così via):

Date cinque località della provincia di Belluno (le località vanno adattate alle realtà in cui si opera):

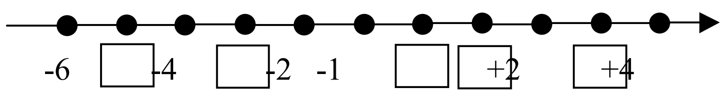
(1) il ghiacciaio della Marmolada alla mezzanotte del 15 gennaio
(2) la riva del Piave in una giornata soleggiata di aprile;
(3) la sabbia della spiaggia di Jesolo a mezzogiorno di un ferragosto;
(4) una sera piovosa di settembre a Belluno;
(5) una giornata nevosa di fine gennaio.

e sei temperature:

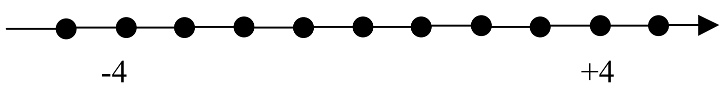
(a) -4° (b) 15° (c) -28° (d) 20° (e) 42°

- Collegare ogni località ad una temperatura argomentando la scelta.
- Segnare le temperature sul termometro:

5. Contare all'indietro attraverso lo zero: tre, due, uno, zero, meno uno, meno due, meno tre, …
6. Rispondere a domande come:
   6.1 'Quanti numeri interi ci sono fra -5 e 3?' Argomenta la risposta.
   6.2 'Ordina delle carte numerate da -15 a +5'. Verbalizza le tue azioni.
   6.3 'Metti i numeri mancanti su questa linea dei numeri (verbalizza ciò che fai):



7. Segna la posizione di -2:

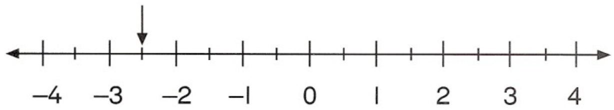


Indice

B. Competenze in uscita alla fine della quinta primaria (Indice)

Un alunno dovrebbe sapere, per esempio:

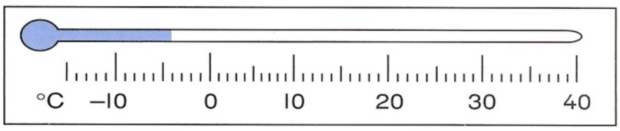
1. Usare, leggere e scrivere in un opportuno contesto: numero intero, positivo, negativo, meno, sopra o sotto lo zero, …
2. Riconoscere numeri negativi su una calcolatrice. Usare la funzione costante per generare sequenze di numeri negativi.
3. Contare all'indietro attraverso lo zero: sette, tre, meno uno, meno cinque, …
4. Rispondere – argomentando - a domande come:
   4.1 'Ordina questi numeri scrivendo il minore a sinistra: -2, -8, -1, -6, -4'.
   4.2 'Quale numero sta puntando la freccia?



5. Questa è una fila di sei carte. Tre sono bianche. Scrivi un numero intero in ognuna di esse in modo che i sei numeri siano in ordine. Verbalizza ciò che fai:

6. Se -7<a<-4 che numero intero potrebbe essere a? Argomenta la risposta.
7. Usare i numeri negativi nel contesto della temperatura. Per esempio (argomentare le risposte:

   7.1 Che temperatura segna il termometro?



   7.2 La temperatura si alza di 15 gradi. Segna la nuova temperatura leggendola sul termometro.

   7.3 La temperatura scende da 11° a -2°. Di quanti gradi è diminuita?

   7.4 La temperatura è di 6°. Scende di 8°. Qual è la temperatura ora?

   7.5 La temperatura è di -3°. Di quanto deve aumentare per giungere a 5°?

   7.6 Che differenza di temperatura c'è fra i -4° e i 14°?

8. Scrivi il segno adatto (<, >, =) fra coppie di numeri (De Agostini 2009):

   -6…..0 +4…..-4 +5…..-9 -3…..-7 0…..+3 +1…..-5

9. Usa i numeri negativi in altri contesti quali:

   9.1 Spostamenti sotto il livello del mare:
   - Un sub si trova a 30 metri di profondità. Sale di 12 metri, poi ridiscende di 4 metri. A che profondità si trova ora? Argomenta la risposta.

   9.2 Linea del tempo (De Agostini 2009); argomenta le risposte:
   - Ottaviano Augusto fu imperatore dal 30 a.C. al 14 d.C.. Quanto durò il suo impero?
   - La storia di Roma iniziò nel 753 a.C. e terminò nel 476 d.C.. Quanti anni durò?

Indice

C. Competenze in uscita alla fine della prima secondaria (Indice)

Un alunno dovrebbe sapere, per esempio:

1. Utilizzare i numeri relativi come rappresentazioni modellizzanti espressioni linguistiche come 'La temperatura sale', 'La temperatura è aumentata', ecc.
2. Risolvere questioni come:
   2.1 'Ordina questi numeri scrivendo il minore a sinistra: -37, 4, 29, -4, -28.

   2.2 Nell'equazione a+b=7, a e b rappresentano numeri naturali. Scrivi, incolonnandole, le coppie dei loro possibili valori. Fai lo stesso con $a+b={}^{-}7$. Che differenze trovi tra le due situazioni?

   2.3 Inserisci questi punti in un piano cartesiano: A (5,4); B (5,8); C (-3,4); D (-3,8). Che figura formano? Che lunghezza ha il suo perimetro?
3. Usare i numeri negativi nel contesto della temperatura. Per esempio:
   3.1 La temperatura è di -5°. Scende di 6°. Qual è la temperatura ora?

   3.2 La temperatura è di -11°. Si alza di 2°. Qual è la temperatura ora?

   3.3 La temperatura al polo nord è di -20°. Di quanto si deve alzare per arrivare a -5°?

   3.4 Segna su una linea dei numeri le temperature raccolte ogni giorno per una settimana: -2°, +3°, -1°, -4°, -7°, -1°, 0°.
4. Usare i numeri negativi in altri contesti quali:
   - Lena fissa la quota di 1 metro come obiettivo da raggiungere nella gara di salto in alto. Segna in centimetri ogni tentativo in relazione all'obiettivo:

+2	−3	+2	−2	0	−1

- Quale è stato il suo salto migliore? Quanto ha saltato?
- Quale è stato quello peggiore? Quanto ha saltato?
- Quale è stata la media dei salti? Di quanto si scosta la media dall'obiettivo?

Indice