

# Equazioni di Maxwell

Legge di Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

in forma integrale: 
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

ovvero: L'integrale della densità di carica  $\rho(\vec{r})$  fatto su un volume chiuso  $V$  è pari al flusso del campo  $\vec{E}$  attraverso la superficie  $S$  che racchiude il volume  $V$ .

Applicazione semplice: campo  $\vec{E}$  generato da una carica  $q$ .



Persimmetrica,  $\vec{E}(\vec{r})$  è radiale e costante in modulo sulla superficie sferica.

Il flusso di  $\vec{E}$  sulla sfera sarà:  $4\pi r^2 \cdot E(r)$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Legge di Gauss  
per il magnetismo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

in forma integrale: 
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

La conseguenza è che non esistono "cariche" magnetiche. I campi  $\vec{B}$  sono generati da dipoli magnetici.

Legge dell'induzione  
di Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Una variazione di flusso di  $\vec{B}$  su una certa superficie  $S$ , genera un campo  $\vec{E}$ . Se calcolo l'integrale di linea di  $\vec{E}$  su un percorso chiuso che delimita  $S$ , il valore che ottengo è pari alla variazione di flusso di  $\vec{B}$  su  $S$ .

Legge di Ampere

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{B}$  può essere generato da una corrente ( $\int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ ) o dalla variazione di flusso del campo elettrico.

Combinando tra loro le equazioni di Maxwell si trova che  $\vec{E}(t)$  e  $\vec{B}(t)$  obbediscono alle seguenti equazioni:

$$\frac{d^2 \vec{E}(t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \vec{E}(t)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 B(t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 B(t)}{dx^2}$$

Sono le equazioni d'onda che, estese al caso generale 3D ( $x \rightarrow \vec{r}$ ) hanno soluzioni:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

con  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$   $\lambda$  lunghezza d'onda

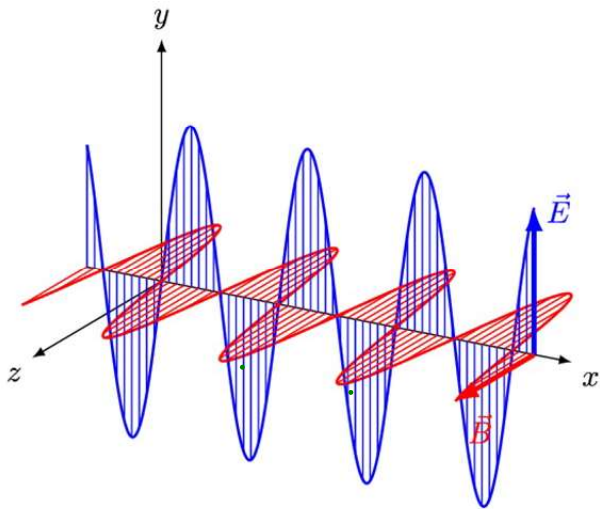
$$\frac{c}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Un'onda elettromagnetica può sempre essere descritta con una combinazione lineare di onde piane

## Onde elettromagnetiche

Un'onda elettromagnetica posso rappresentarla come sovrapposizione di onde piane, ognuna delle quali costituita da un campo elettrico  $\vec{E}$  e un campo magnetico  $\vec{B}$  di forma sinusoidale. Esprimendo i campi in forma complessa, sar :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \text{ con } \vec{k} \text{ vettore d'onda e } \omega \text{ velocit  angolare.}$$



$\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  formano una terna di vettori ortogonali, l'onda si propaga in direzione  $\hat{k}$

Si ha inoltre che  $B_0 = \frac{E_0}{c}$ .

Affrontando il problema dell'interazione tra un campo e.m. e particelle cariche, il campo magnetico   trascurabile a meno che non trattiamo casi relativistici.

(la forza di Lorentz vale:  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  )

Una regione di spazio dove ci sono campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  contengono energia.

Le densità di energia vale, rispettivamente,  $u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  e  $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Nel caso di onde piana, i campi si propagano, nel vuoto, con velocità  $c$

Così avviene per l'energia che trasportano.

Se pensiamo alle onde come a dei fotoni, immaginare che dell'energia venga trasportata  $\bar{e}$  immediato.

Rimovendo però in notazione  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , conviene introdurre il vettore di Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$\vec{S}$  ha la stessa direzione di  $\vec{k}$ , ovvero la direzione di propagazione dell'onda e.m.

Se integro  $\vec{S}$  su una superficie trovo l'energia che l'onda e.m. trasporta attraverso essa nell'unità di tempo.

Una carica  $q$  ferma produce radiazione e.m.?

No. Se lo fa, l'energia trasportata dovrebbe avere una componente reale

$$\Rightarrow S_{\perp} \neq 0 \Rightarrow E_{\parallel} \neq 0$$

Ma Gauss ci insegna che nel caso di  $\cdot q$ , il campo ha solo componente reale.

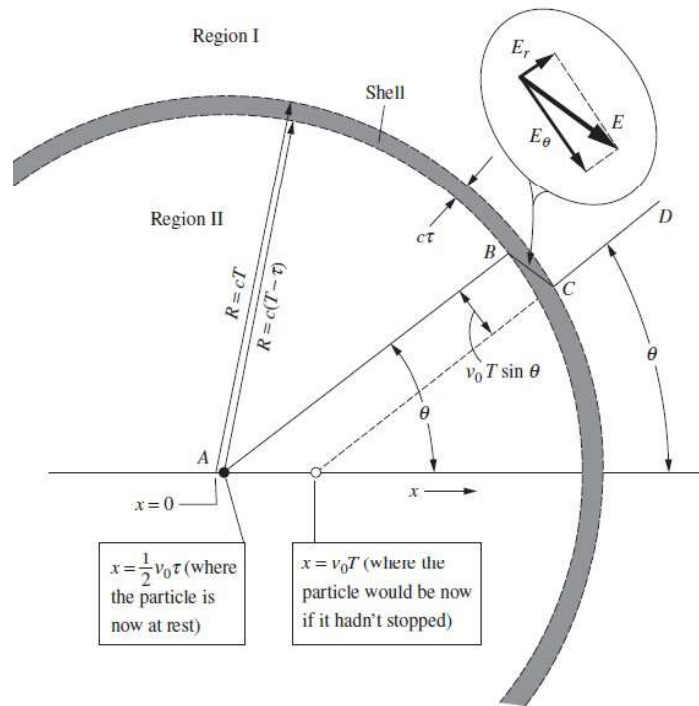
Anche se  $q$  viaggia a  $v$  costante è lo stesso. Mi metto in un sistema di riferimento solidale con  $q$  e ho la stessa situazione descritta prima

Me: se  $q$  accelera ....

# Formule di Larmor (1897. Noi vediamo la derivazione alle J.J. Thomson)

Considero una particella carica che si muove con velocità  $v_0$  sull'asse  $x$ . A  $x=0$  decelerare e si ferma in un tempo  $\tau$ , prob. Si troverà quindi in posizione  $x = \frac{1}{2} v_0 \tau$ .

Aol un certo tempo successivo  $T \gg \tau$ , un osservatore che si trovi ad una distanza maggiore di  $R = cT$ , non potrà avere "notizie" di ciò che è avvenuto. Vedrà un campo dato dalla particella come se non si fosse fermata (CD).



Chi invece osserva a distanze minori vede il campo reale AB

Considerando le linee di campo AB CD, affinché sia continua (deve esserlo per Gauss, non ho cariche che possano giustificare le discontinuità) deve esserci un campo elettrico BC -

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} a t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{v_0}{\tau} \tau^2 \\
 &= \frac{1}{2} v_0 \tau
 \end{aligned}$$

Per similitudine:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T \sin \theta}{c \tau}$$

ma  $E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 \tau^2}$$

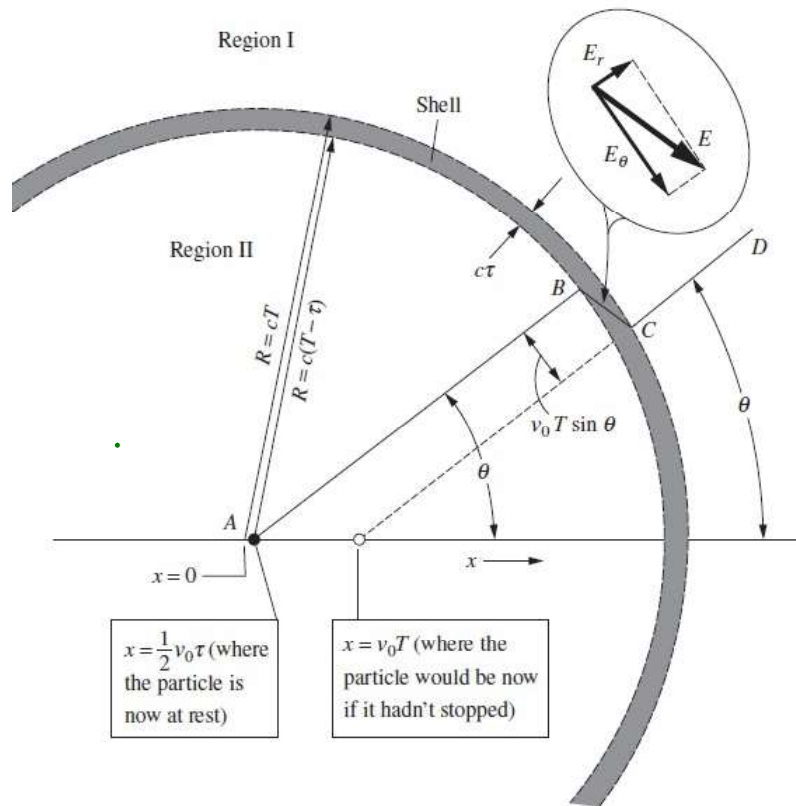
de Gauss e considerando  $c\tau \ll R$

$$\Rightarrow E_\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 \tau^2} \frac{v_0 \tau \sin \theta}{c \tau} = \frac{q v_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^3 \tau c}$$

$$= \frac{q a \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}$$

$$a = v_0 / \tau$$

$$R = c \tau$$



Ho un campo  $E_\theta$  che viaggia con velocità  $c$

- avrà associato un campo  $B = \frac{E}{c}$



Il campo  $E_0$  trasporta energia. Possiamo calcolare l'energia contenuta nel guscio sferico:

$$\begin{aligned}
 U_{el} &= \int_{\text{guscio}} \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} dV = \int \frac{\epsilon_0 q^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} dV \\
 &= \frac{q^2 \omega^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} \int r^2 \sin \theta \cdot \sin \theta d\theta d\phi dr \\
 &= \frac{q^2 \omega^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_R^{R+c} \left[ \frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3}{4} \cos \theta \right]_0^\pi \\
 &= \left( \frac{q^2 \omega^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} \right) 2\pi \frac{(R+c)^3 - R^3}{3} \left( \frac{4}{3} \right) \\
 &\quad \left( R^3 + c^3 + 3R^2c + 3R(c^2) \right) \\
 &\quad \approx R^3 + 3R^2c \\
 &= \left( \frac{q^2 \omega^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^2 c^4} \right) 2\pi R^2 c c \frac{4}{3} = \frac{q^2 \omega^2 c}{12 \pi \epsilon_0 c^3}
 \end{aligned}$$

Una quantità analogo sarà disponibile dal campo B, e per l'energia totale prodotta:

$$U_{E+B} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} c$$

La potenza

$$P_{\text{rad}} = \frac{U_{E+B}}{c} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

Potenza di Larmor



Supponiamo di avere due cariche  $\pm q$ , disposte lungo  $z$  ad una distanza  $d$  tra loro

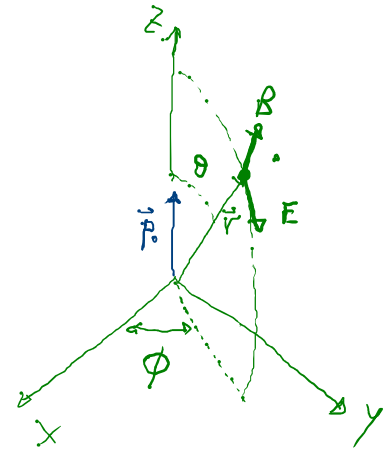
Si definisce momento di dipolo il vettore  $\vec{p}_0 = d q \hat{e}_z$

Se ogni carica inizia a cambiare valore come  $q \cdot \cos(\omega t)$  si parla di momento di dipolo oscillante  $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$

Risolvendo le equazioni di Maxwell si trova che, a distanza  $r \gg d$ , il campo elettrico generato dal dipolo è:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{E}{c} \hat{\phi}$$

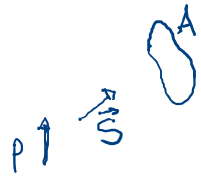


Il vettore di Poynting  $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$  ha direzione radiale e vale:

$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{c} \left[ \frac{p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right]^2 \hat{r}$$

Il suo valore medio nel tempo:  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$

L'integrale di  $\langle \vec{S} \rangle$  su una certa area  $A$  mi dà la potenza irradiata su quella superficie:



The diagram shows a small irregularly shaped area labeled 'A'. A vector labeled 'n' points upwards from the area, representing the normal to the surface. Another vector labeled 'S' points to the right, representing the Poynting vector. The area is shaded with light blue lines.

$$\langle P \rangle_A = \int_A \langle \vec{S} \rangle d\vec{a}$$

La potenza totale irradiata la si può trovare integrando su una sfera di raggio  $r$ :

$$P = \int \langle S \rangle d\vec{a} = \frac{\mu_0 \rho_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \underbrace{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}_{d\vec{a}} = \frac{\mu_0 \rho_0^2 \omega^4}{12 \pi c} \left( \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \right)$$

Caso particolare:  $e^-$  libero in onde e.m. (Scattering Thomson)

Un  $e^-$  investito da un'onda piana sentirà una forza  $\vec{F} = -e\vec{E}$  (trascurò  $\vec{B}$ ):

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -eE \\ &= -eE \cos \omega t \end{aligned}$$

supponendo  $\vec{E}$  diretto lungo  $\vec{z}$

Questa equazione ha soluzione:

$$z(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t)$$

Ma, se considero la quantità  $e z(t)$ , essa mi rappresenta un dipolo oscillante, ha le stesse forme:

$$p(t) = e z(t) = p_0 \cos(\omega t) \quad \text{con} \quad p_0 = \frac{e^2 E_0}{m\omega^2}$$

In questo caso la potenza emessa zero:

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0}{c} \frac{1}{12\pi} \frac{e^4 E_0^2}{m^2 \omega^4} \cdot \omega^4$$

Scompare cioè la dipendenza da  $\omega$ .

Inoltre, se definiamo:  $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} = 2.818 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  raggio classico dell'elettrone

e chiamiamo  $I_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$  l'intensità dell'onda incidente ( $\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$ )

allora la potenza divisa

$$P = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0 = \sigma_T I_0$$

Questa è la potenza irradiata da un elettrone e quindi sottratta all'onda incidente

$$\sigma_T = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 \quad \text{sezione d'urto Thomson}$$

## CONSIDERAZIONI:

1. Lo scattering Thomson descrive bene:

- interazione radiazione - plasma
- interazione raggi X - materia

e energie di fotone  $\sim 4000 - 20000 \text{ eV}$ , se non ci sono soglie di assorbimento, gli  $e^-$  degli atomi rispondono  $\alpha$  come  $e^-$  liberi.

2. Se  $\omega$  dell'ondata e.m. è vicina ad una frequenza di assorbimento dell'atomo/molecola in cui si trova l'elettrone, la sua descrizione come  $e^-$  libero non è più valida. Deve essere descritto invece come

un oscillatore armonico smorzato:  $m\ddot{z} = -\gamma m \dot{z} - m\omega_0^2 z - e\vec{E}$

$\downarrow$  smorzamento  
 $\downarrow$  richiamo elastico ( $\sim F = -Kx$ )

In questo caso si trova una sezione d'urto

$$\sigma_R = \sigma_T \left( \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)$$

$$\sigma_R = \sigma_T \left( \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \quad \text{è nota come sezione d'urto di Rayleigh}$$

NOTA Se si trascura lo smorzamento ( $\gamma = 0$ ) e si considera  $\omega \gg \omega_0$   
 $\sigma_R \approx \sigma_T$ , ritroviamo Thomson

NOTA  $\sigma_R$  ci dice perché il cielo è azzurro e il tramonto è rosso...



Esempio

Ho un fascio di luminosità di  $10^{15} \text{ ph/s} \cdot \text{cm}^2$

Quanti fotoni vengono interattati da  $1 e^-$  in un'ora?

In un'ora ho il flusso di  $N = 10^{15} \cdot 3600 = 3.6 \cdot 10^{18} \text{ ph/cm}^2$

La probabilità e quindi i fotoni interattati saranno:  $N \cdot \sigma_T = 3.6 \cdot 10^{18} \cdot 0.665 \cdot 10^{-24}$   
 $\approx 2 \cdot 10^{-6}$

! si definisce  $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$

Esempio 2

Un puntatore laser ha in genere potenza  $\sim 1 \text{ mW}$

Quanti fotoni al secondo genera un puntatore di  $1 \text{ mW}$  a luce di  $635 \text{ nm}$ ?

$$1 \text{ mW} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ J/s}$$

$$\text{Un fotone di } 635 \text{ nm ha energia: } h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \cdot 10^{-34}) \text{ J} \cdot \text{s} \cdot (3 \cdot 10^8) \text{ m/s}}{635 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3.1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1 \text{ mW}}{h\nu} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ ph/s}}$$