

Nome e Cognome

Corso di Studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (3+6 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{1-\cos x}} - e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{x^3} = \quad .$$

Esercizio 2. (9 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = 3 \log x - 6 \arctan(x - 2),$$

determinando

i) Dominio:

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Grafico di f .

vii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$\log x = \frac{\alpha}{3} + 2 \arctan(x - 2).$$

Esercizio 3. (2+3+3 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

i) Supponiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f(n^2) = 0$. Provare che esiste $(y_n)_n$ successione in \mathbb{R} tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ e, per ogni n , $f'(y_n) = 0$.

ii) Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n^2) = 0$. Provare che esiste $(z_n)_n$ successione in \mathbb{R} tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(z_n) = 0$.

iii) Supponiamo che esista $(y_n)_n$, successione in \mathbb{R} , tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = 0$. Provare che esiste $(z_n)_n$ successione in \mathbb{R} tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(z_n) = 0$.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcoli, utilizzando la formula di Taylor, il valore di

i) $\sin(-1)$,

ii) $\int_0^1 e^{x^2} dx$,

con una approssimazione di 10^{-2} .