

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{x^2 + 1} - x)^x = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \arctan(x - 1) + \log \frac{1}{x},$$

determinando

i) Dominio: .

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Grafico di f .

vii) Si determini il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.

Esercizio 3. (2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

i) Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, si provi che, per ogni $x, \alpha \in \mathbb{R}$,
se $x > x_2$ e $\alpha \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ allora $f(x) \geq f(x_2) + \alpha(x - x_2)$.

ii) Si supponga che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Si provi che f è decrescente.

iii) Si supponga che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Si provi che se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq 0$
allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcoli

$$\int_0^{\pi} (\sin x \cos x)^2 dx = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\arctan^2 x} \frac{\sin t}{t} dt}{x^2} = \boxed{}.$$