

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - \sin^2 x}{x^4} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x^2 + 2} \sqrt{x^2 + 1} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \log(3e^{2x} - e^x + 1),$$

determinando

i) Dominio:

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Grafico di f .

vii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\log(3e^{2x} - e^x + 1) = \alpha.$$

Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si supponga

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ e } f'(a) = f'(b) = \frac{1}{2}.$$

Dimostrare che:

i) esiste $\bar{\xi} \in]a, b[$ tale che $f(\bar{\xi}) = 0$;

ii) esistono almeno due punti $\xi_1, \xi_2 \in]a, b[$, con $\xi_1 < \xi_2$, tali che $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$;

iii) se f è due volte derivabile, allora esiste almeno un punto $\xi_3 \in]a, b[$ tale che $f''(\xi_3) = 0$.

Esercizio 4. (3+4 pt)

i) Si determinino tutti i numeri complessi z tali che

$$\bar{z}z^2 + |z|^2 = -2z.$$

ii) Si determinino tutti i numeri complessi z tali che

$$\bar{z} = iz^3.$$