

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

Esercizio 1. (2+3+4 pt)

Si calcolino i seguenti limiti

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x) - 3x}{x^2} = \boxed{}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{x^3 - 1} - x) = \boxed{}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \boxed{}$$

Esercizio 2. (8 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti importanti:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$
e suo segno.

viii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

x) Dire, al variare di α in \mathbb{R} , quante soluzioni ha l'equazione

$$x^2 e^{-x} = \alpha.$$

Esercizio 3. (3+3 pt)

i) Si trovi il polinomio di Taylor di grado 2 associato alla funzione

$$f(x) = \log(\sin(2x)),$$

nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Si scriva inoltre la relativa formula di Taylor con resto di Lagrange.

ii) Usando questa formula, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\log(\sin(2x)) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2}{(x - \frac{\pi}{4})^3}.$$

Esercizio 4. (2+2+4 pt) Si calcolino:

i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \boxed{}$$

ii)

$$\int_0^{2\pi} x \sin^2 x \, dx = \boxed{}$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} \int_x^2 \log(t^2+1) dt = \boxed{}$$