

Nome e Cognome

Corso di studi: Fisica Matematica

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} (x+\pi) \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 4x - 5}{1 - 7x^4} \ln(e^x - 1) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{7x + 5},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Limiti importanti:

iii) Eventuali asintoti:

iv) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$
e suo segno.

vii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

viii) Eventuali simmetrie.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (3+3+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$f(-2) = f(-1) = -7, \quad f(1) = f(2) = 7.$$

Dimostrare che:

i) la funzione non è né convessa né concava;

ii) la derivata assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[0, 7]$;

iii) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(4x) dx = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^3} \int_{x^2}^{4x^2} \sin(\sqrt{t}) dt = \boxed{}.$$